Ein Beitrag zur nichtlinearen Berechnung des Tragverhaltens von Stahlbetonschalen

DOKTORARBEIT

zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Bauingenieurwesen
der Ruhr-Universität Bochum

von

WALTER STEFFEN
Bochum

Bochum 1984

THE LIBRARY

Ein Beitrag zur nichtlinearen Berechnung des Tragverhaltens von Stahlbetonschalen

DOKTORARBEIT

zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Bauingenieurwesen
der Ruhr-Universität Bochum

von

WALTER STEFFEN

BOCHUM

BOCHUM 1984

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546407_0035

Ein Beitrag zur nichtlinearen Berechnung des Tragverhaltens von Stahlbetonschalen

DOKTORARBEIT

zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Bauingenieurwesen
der Ruhr-Universität Bochum

von

WALTER STEFFEN

Bochum

Bochum 1984

Doktorarbeit eingereicht am : 25.05.1984
Tag der mündlichen Prüfung : 20.11.1984

Berichter : Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. W. Zerna
Prof. G. Schmid, Ph. D.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1980 bis 1984 am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Lehrstuhl für Stahlbeton- und Spannbetonbau, der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. W. Zerna danke ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit, die Unterstützung und die Übernahme der Berichterstattung.

Herrn Prof. G. Schmid, Ph. D., danke ich für die Unterstützung und die Übernahme der Berichterstattung.

Darüberhinaus danke ich Herrn Dr.-Ing. I. Mungan für die zahlreichen Diskussionen und die wertvollen Hinweise, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Bochum, Dezember 1984

Walter Steffen

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
1.	Einleitung	1
	1.1 Historischer Überblick	1
	1.2 Entwicklungsphasen der Schalentheorie	2
	1.3 Berechnungsmethoden	3
	1.4 Physikalische Nichtlinearität	6
	1.5 Verbundverhalten	8
	1.6 Berechnungsmodelle	9
	1.7 Ziel der Arbeit und Übersicht	1o
2.	Materialgesetz für Stahlbeton	13
	2.1 Allgemeines	13
	2.2 Zweiachsiale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für ungerissenen Beton	14
	2.3 Gerissener Beton	2o
	2.4 Bruchverhalten von Beton unter zweiachsialer Beanspruchung	24
	2.5 Spannungs-Dehnungs-Beziehung für einen Bewehrungsstab	28
	2.6 Flächenhaft angeordnete Bewehrung	3o
	2.7 Verbundverhalten von Beton und Bewehrung	31
	2.7.1 Grundgleichungen	31
	2.7.2 Rißentwicklung und Berücksichtigung in der Analysis	36
	2.7.3 Darstellung der Ergebnisse	56
3.	Finite-Element-Beschreibung	64
	3.1 Allgemeines	64
	3.2 Geometrisch und physikalisch nichtlineare Grundlagen	66
	3.3 Diskretisierung für ein finites Element	7o

3.4 Lineares Semi-Loof-Element 72
3.5 Geschichtetes Semi-Loof-Element 79
3.6 Geschichtete geometrische Steifigkeitsmatrix 85
3.7 Residuale Knotenlasten 87
3.8 Lösungsalgorithmus am finiten Element 88
3.9 Ausdruck der Ergebnisse 9o

4. Nichtlinearer Lösungsalgorithmus 91
4.1 Allgemeines 91
4.2 Lösungsverfahren 93
4.3 Gleichgewichtsiteration infolge Rißbildung und Nichtlinearitäten 94
4.4 Inkrementell linearer Lösungsalgorithmus 96
4.5 Programmtechnische Bearbeitung 97

5. Beispiele 1o4
5.1 Allgemeines 1o4
5.2 Eingespannte Platte unter Flächenlast 1o5
5.3 Kugelschale unter Flächenlast 116
5.4 Naturzugkühlturm unter Eigengewicht und Stützensenkung 126

6. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen 142

7. Bezeichnungen 145

8. Literaturverzeichnis 148

Lebenslauf

1. Einleitung

1.1 Historischer Überblick

Mit dem stetig zunehmenden Bedarf an Stahlbetontragwerken wächst auch die Bedeutung wirtschaftlich optimierter und zugleich allen Sicherheitsanforderungen genügender Bauwerke.

Insbesondere das Tragverhalten von Schalen aus Stahlbeton war in den letzten Jahren Gegenstand reger Forschungstätigkeit.

Der derzeitige Kenntnisstand der Bautechnik wird mit dem Bau von bis zu 180m hohen Naturzugkühltürmen, von Behälter - bzw. Silobauwerken sowie von Schalenbauwerken im Off-Shore-Bereich deutlich demonstriert.

Um zuverlässige Aussagen über die Wirtschaftlichkeit und Standsicherheit derartiger Stahlbetontragwerke machen zu können, ist es notwendig, das Tragverhalten bis zur Tragfähigkeitsgrenze realistisch vorherzusagen.

Dieses erfordert eine wirklichkeitsnahe Beschreibung des Materialverhaltens von Stahlbeton und des Einflusses auf die Gesamtkonstruktion sowie die Berücksichtigung des spannungs - und verformungsabhängigen Tragverhaltens von Schalen.

Einen vertieften Überblick über die geschichtliche Entwicklung sowie über ausgeführte Schalenbauwerke kann der Literatur, z.B. /1.1/, /1.2/, /1.3/, entnommen werden.

1.2 Entwicklungsphasen der Schalentheorie

Die zahlreichen, ursprünglich induktiv entstandenen "klassischen", linearen Schalentheorien wurden im Jahre 1949 von Neuber /1.4/ als Näherungslösungen einer dreidimensionalen (3-D) Kontinuumsmechanik erkannt. Dieser Näherungscharakter wird auch in den Arbeiten von Zerna /1.5/, /1.6/ sowie Green/Zerna /1.7/ verdeutlicht.

Die anwachsenden Anforderungen an die Wirtschaftlichkeit der Schalenbauwerke führte bei gleichen äußeren Abmessungen zu immer dünneren Wandstärken, so daß die bis dahin verwendeten linearen Theorien auf der Grundlage infinitesimaler Verformungen und linearen Baustoffverhaltens das Tragverhalten des Bauwerks unter

hohen Beanspruchungen nicht mehr zufriedenstellend beschreiben konnten.

Erst eine Betrachtungsweise aus der 3-D-Kontinuumsmechanik lieferte schlüssige schalentheoretische Grundgleichungen, die durch geeignete Approximationen in der Lage sind, die klassischen Schalentheorien innerhalb des 3-D-Kontinuums einzuordnen und weiter zu entwickeln. Damit können erstmalig auch geometrisch und physikalisch nichtlineare Probleme beschrieben werden, vgl. Zerna /1.8/, Krätzig /1.9/, /1.10/ sowie Green, Naghdi /1.11/, Baçar /1.12/ u.a..

1.3 Berechnungsmethoden

Die rapide verlaufende schalentheoretische Entwicklung erforderte leistungsfähige Lösungsalgorithmen, deren Bewältigung nur durch die wachsenden Kapazitäten der elektronischen Rechenanlagen ermöglicht wurde.

Im Jahre 1943 wendet Courant /1.13/ erstmalig das Verfahren von Ritz bereichsweise an. Dieses entspricht dem Konzept der Verschiebungsmodelle innerhalb des als Finite-Element-Methode bekannt gewordenen Lösungsalgorithmus.

Die Methode der Finiten Elemente verzichtet i.a. auf eine strenge Lösung des Problems. Die mit den verwendeten Ansatzfunktionen erreichbaren Lösungen können nur als Näherungen der physikalsichen Zustandsgrößen interpretiert werden.

In den folgenden Jahren erschienen zahlreiche Veröffentlichungen, welche die Entwicklung der Finiten-Element-Methode beschreiben, so z.B. Zienkiewicz /1.14/, Oden /1.15/ u.a.. Die Grundlagen dieses Verfahrens können der angegebenen Literatur, die auch zahlreiche weiterführende Literaturstellen aufweist, entnommen werden.

Zur Berechnung von Flächentragwerken mittels der Methode der Finiten-Elemente können zwei grundsätzlich verschiedene Wege eingeschlagen werden (vgl. Bild 1.1).

1. Ausgehend von den Feldgleichungen der dreidimensionalen Theorie führen zahlreiche tragwerksspezifische Annahmen zu einer Theorie der Flächentragwerke. Diese Reduktion ist verbunden mit einer analytischen Integration über die Dicke. In diesem Zusammenhang sind die Veröffentlichungen von Sanders /1.16/ und Koiter /1.17/ zu nennen, deren Theorie als Grundlage vieler Finite-Element-Entwicklungen dient. Die folgenden numerischen Prozeduren beinhalten die Integration über die Referenzfläche.
2. Die alternative Methode geht von den Feldgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums aus und führt die tragwerksspezifischen Annahmen auf der Ebene der diskretisierten Finiten Elemente durch. Im Gegensatz zum klassischen Konzept (s.1.) wird die Geometrie und das Verformungsfeld des Flächentragwerks diskretisiert. Die kinematischen -nicht die statischen- Variablen werden durch die resultierenden Größen der Mittelfläche sowie durch die relativen Verformungen der Oberflächen des Trag-

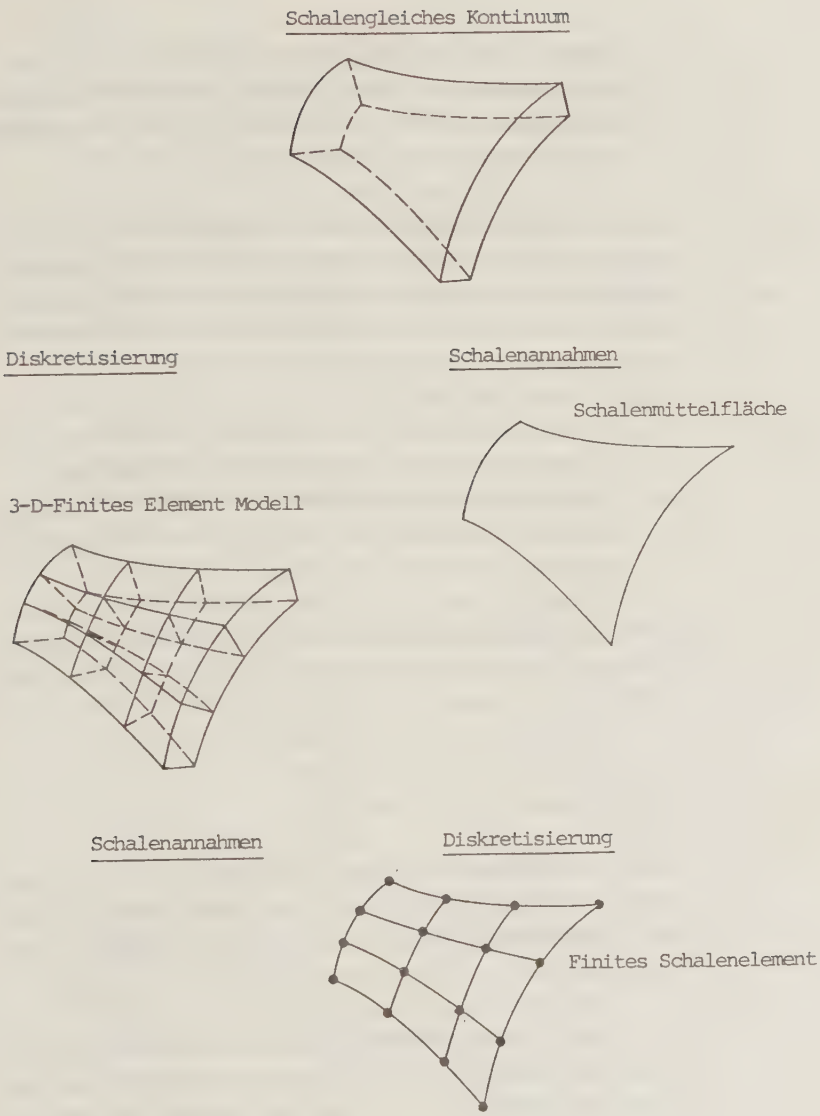


Bild 1.1
Strategien zur Entwicklung eines Finiten Schalenelementes

werks repräsentiert. Diese Näherung wurde zuerst von Ergaitoudis /1.18/ sowie Ahmad, Irons und Zienkiewicz /1.19/ zur linearen Berechnung dicker Schalentragwerke benutzt.

Der derzeitige Kenntnisstand auf dem Gebiet der numerischen Lösungsalgorithmen läßt auch die Lösung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Probleme zu, wobei auch hier unterschiedliche Lösungswege möglich sind:

1. das nichtlineare Problem wird mathematisch formuliert und anschließend numerisch gelöst;
2. das nichtlineare Problem wird durch sukzessive Korrektur des linearisierten Problems numerisch gelöst.

Einen ausführlichen Überblick sowie weiterführende Literaturhinweise gibt z.B. Oden in /1.15/ bzw. Bathe und Bolourchi in /1.21/.

1.4 Physikalische Nichtlinearität

Stahlbetonflächentragwerke zeigen neben geometrisch nichtlinearen Einflüssen ein im wesentlichen durch materialabhängige Nichtlinearitäten geprägtes Tragverhalten auf.

Die z.Z. gültigen deutschen Normen berücksichtigen dieses Verhalten durch einfache nichtlineare konstitutive Beziehungen, wobei das Mitwirken des Betons

auf Zug bei der Betrachtung eines lokal begrenzten Spannungs- und Verzerrungszustandes ausgeschlossen ist.Die den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen zugrunde liegenden einachsialen Versuchsergebnisse können dem tatsächlichen Materialverhalten von Beton in mehrdimensionalen Tragwerken jedoch nur annähernd gerecht werden. Neuere experimentelle Untersuchungen, z.B. von Kupfer /1.22/, an bis zum Bruch belasteten Scheiben haben als Grundlage in viele Beschreibungen des Materialverhaltens Eingang gefunden. Link entwickelt in /1.23/ zweiachsiale konstitutive Beziehungen bis zum Bruch für unbewehrten Normal- und Leichtbeton mit quarzitischen Zuschlagstoffen. Seine Formulierung beschreibt in Übereinstimmung mit den Versuchen von Kupfer /1.22/ die Eigenschaften des sich ursprünglich isotrop verhaltenden Betons, der unter hohen Beanspruchungen anisotrope Merkmale und bei Erreichen der Festigkeitsgrenzen unterschiedliche Versagensformen - u.a. abhängig von der Art der Beanspruchung - aufweist. Die Anwendung seiner Formulierung in zahlreichen Veröffentlichungen, u.a. in /1.24/, /1.25/, führte zu zufriedenstellenden Ergebnissen.

Einen Überblick über die zahlreich erschienenen Veröffentlichungen sowie eine detaillierte Schilderung der geschichtlichen Entwicklung gibt eine Studie von Eibl und Iványi /1.26/. Fortführende Arbeiten mit zahlreichen Literaturhinweisen sind die Veröffentlichungen von Schäfer/1.27/, Geistefeldt /1.28/, Kristjansson /1.29/ sowie Floegl /1.30/.

1.5 Verbundverhalten

Aufgrund der Größe der Betonzugfestigkeit - sie liegt bei ca. 5% bis ca. 10% der Betondruckfestigkeit -, der großen Streuung und zusätzlich auftretenden, nicht berücksichtigten Schrumpf- und Schwindrissen vernachlässigen die deutschen Normen i.a. die Zugfestigkeit des Betons.

In vielen Fällen führt örtlich begrenztes Materialversagen, z.B. infolge zu geringer lokaler Betonzugfestigkeit, zu einer Spannungsumlagerung in benachbarte Bereiche mit noch vorhandenen Tragreserven, d.h. innerhalb großer Bereiche wird das Tragverhalten von gemittelten Materialkennwerten beeinflußt. In Einzelfällen werden diese Spannungsumlagerungen bereits in den deutschen Vorschriften berücksichtigt. So muß das Mitwirken des Betons auf Zug stillschweigend z.B. bei Stößen und Verankerungen von Bewehrungsstäben in Ansatz gebracht werden, da anderenfalls keine Verbundeigenschaften zwischen dem Bewehrungsstab und dem umgebenden Beton berücksichtigt werden könnten.

Die wenigen Veröffentlichungen, die in jüngster Zeit erschienen sind und das Thema Verbundeigenschaften beinhalten, schließen - in Übereinstimmung mit dem beobachteten Verhalten und teilweise auch mit den deutschen Normen - von der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen ausgehend auf mittlere Betonzugfestigkeiten innerhalb eines beanspruchten Verbundbereiches. Die ersten Ansätze, dieses Verhalten auf die Berechnung von Stahlbetontragwerken zu über-

tragen, stammen von Rabbich /1.31/ und Rao /1.32/. Fortführende Arbeiten sind die Veröffentlichungen von Koch /1.33/ und Svensvik /1.34/ mit weiteren Literaturhinweisen.

1.6 Berechnungsmodelle

Um zumindest die für das Tragverhalten eines Bauwerks wesentlichen Eigenschaften des Baustoffes Stahlbeton zu berücksichtigen, muß ein Modell, das in die numerische Berechnung eingeht, folgende Merkmale zutreffend beschreiben können:

- das Rißverhalten von Beton
- die Art, Lage und Größe der Bewehrung,
- das nichtlineare Spannungs-Verzerrungsverhalten,
- das Bruchverhalten des Betons und der Bewehrung,
- das Verbundverhalten zwischen Beton und Bewehrung,
- das Langzeitverhalten und die damit verbundene Schnittgrößenumlagerung.

In einer der ersten Arbeiten, die das nichtlineare Materialverhalten von Stahlbeton einschließlich der Rißbildung berücksichtigen, verändern Ngo und Scordelis /1.35/ die Topologie des Systems, entsprechend dem äußeren Erscheinungsbild einer gerissenen Struktur.

Neuere Veröffentlichungen verwenden finite, über die Dicke integrierte konstitutive Beziehungen, z.B. in Form von Momenten-Krümmungs-Beziehungen. Bei diesem Verfahren werden materialabhängige Einflüsse, wie z.B. die Rißbildung oder das Verbundverhalten von Bewehrungsstahl und umgebenden Beton, in integralen

Materialgesetzen im Mittel berücksichtigt. Die meisten Autoren, die sich insbesondere mit dem Verbundverhalten beschäftigen, z.B. Koch /1.33/ und Svensvik /1.34/, bevorzugen dieses Verfahren, das jedoch weitgehend auf ebene Flächentragwerke beschränkt ist, da allgemeingültige integrale Werkstoffbeziehungen unter Berücksichtigung der Einflüsse aus der Membrantragwirkung bisher nicht existieren.

Mit der Entwicklung des Schichtenmodells in den vergangenen Jahren wurde ein Verfahren konzipiert, das heute wegen seiner Vielseitigkeit zunehmend Beachtung findet (vgl. z.B. /1.29/, /1.30/, /1.36/, /1.37/, /1.38/). Dieses Verfahren geht aus von zu einer Bezugsfläche parallelen Schichten mit flächenhaftem Spannungszustand. Entsprechend den unterschiedlichen Beanspruchungsgraden bzw. den unterschiedlichen Materialien gelten für die einzelnen Schichten auch unterschiedliche konstitutive Beziehungen. Bei dieser als "mechanical sublayer model" bezeichneten Idealisierung werden auf jeder Belastungsstufe Schnittgrößen als über die Schichtenanzahl aufsummierte Spannungsresultierenden einer einzelnen Schicht gebildet.

1.7 Ziel der Arbeit und Übersicht

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine möglichst realistische Bestimmung des Tragverhaltens von Schalen aus Stahlbeton unter Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Materialverhaltens innerhalb einer geometrisch nichtlinearen Theorie.

In Kapitel 2 werden die berücksichtigten Eigenschaften des Verbundbaustoffes Stahlbeton vorgestellt und aufbereitet. Die Baustoffe Beton und Bewehrungsstahl werden getrennt beschrieben. Der Beton wird durch eine zweiachsiale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung bis zum Materialversagen abgebildet. Für gerissenen Beton werden die konstitutiven Gleichungen unter Berücksichtigung der Rißverzahnung angegeben. Der Bewehrungsstahl wird durch eine einachsiale, bilineare Spannung-Verzerrungs-Beziehung beschrieben. Zur weiteren Betrachtung werden die Stabstähle durch äquivalente, flächenhaft angeordnete Bewehrungsstahlschichten idealisiert.

Ein besonderes Interesse gilt dem Verbundverhalten von Beton und Bewehrungsstabstahl, das durch die Einführung von gemittelten Stahl- und Betonzugkomponenten innerhalb eines gerissenen Bereiches berücksichtigt wird. Neben den Einflußparametern Erstrißstahlspannung, Stahlspannung im Riß, Elastizitätsmodul des Stahles, Bewehrungsgrad und Betonzugfestigkeit werden die Streuung der Betonzugfestigkeit während des Rißvorganges sowie die Verbundeigenschaften des Bewehrungsstahles in die Rechnung eingeführt. Die Kompatibilität der gemittelten Verzerrungen innerhalb der Druck- bzw. Zugzone eines gerissenen Querschnittes wird durch eine globale Betrachtung des Gesamtquerschnittes sichergestellt. Eine zusätzliche Scheibenbetrachtung entfällt.

Ausgehend von einem linearen isoparametrischen Schalenelement werden in Kapitel 3 Beziehungen vorgestellt, die zu einem geschichteten isoparametrischen

Schalenelement führen. Dieses ist in der Lage, die in Kapitel 2 aufbereiteten Grundlagen der Materialbeschreibung zu berücksichtigen. Eine Erweiterung der konstitutiven Beziehungen um die quadratischen Terme der Verzerrungen wird innerhalb eine totalen Lagrange´schen Formulierung beschrieben.

In Kapitel 4 wird auf die besonderen Schwierigkeiten eingegangen, die bei der numerischen Berechnung von Stahlbetonbauteilen - insbesondere bei Berücksichtigung des Verbundverhaltens - entstehen können. Die Algorithmen zur Durchführung der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnung werden aufgezeigt.

Anhand einiger ausgewählter Beispiele wird in Kapitel 5 die Effektivität des vorgestellten Rechenmodells demonstriert.

2. Materialgesetz für Stahlbeton

2.1 Allgemeines

Die Komponenten Stahl und Beton des Werkstoffes Stahlbeton und ihre unterschiedlichen Werkstoffeigenschaften sowie deren Zusammenwirken im Verbund werden im folgenden Kapitel untersucht.

Beton verhält sich schon unter niedrigem Lastniveau anisotrop und nichtlinear. Die Formulierung der ebenen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für den gesamten Beanspruchungsbereich bis zum Bruch berücksichtigt die Zielsetzung dieser Arbeit, einen genaueren Einblick in das Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken zu ermöglichen.

In Anlehnung an die numerische Handhabung (Kapitel 3) wird Beton, der an diskreten Stellen gerissen ist, jedoch noch Bindungsenergie besitzt, als nicht zerstört angesehen.

Das unterschiedliche Bruchverhalten des Betons im Druck-/Druck-, Druck-/Zug- bzw. Zug-/Zugbereich wird durch eine geschlossene Formulierung ohne Bereichsabgrenzung erfaßt.

Insbesondere die geringe Zugfestigkeit des Betons führt schon bei geringer Beanspruchung zu einem Materialversagen. Eine genaue Betrachtung der Spannungsumlagerung vom Beton über Verbundspannungen auf den Stahl ist deshalb von besonderer Bedeutung.

2.2 Zweiachsiale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für ungerissenen Beton

Die meisten bisher durchgeführten experimentellen Untersuchungen an Betonen unter zweiachsialer Beanspruchung hatten zum Ziel, die Bruchfestigkeit zu bestimmen. Erst neuere Versuchsergebnisse stellen darüberhinaus das Verformungsverhalten von Beton dar.(vgl. /2.1/, /2.2/, /2.3/)

Die der weiteren Betrachtung zugrunde liegenden Versuche wurden von Kupfer /2.2/, /2.3/ an Betonscheiben unter erstmaliger,monoton anwachsender Beanspruchung durchgeführt. Als Meßergebnis erhielt er die beiden Hauptverzerrungen ε_{11}, ε_{22} in der Flächenebene sowie die Querdehnung ε_{33} normal zu dieser Fläche für unterschiedliche Belastungszustände bis zum Bruch.

Eibl und Ivanyi geben in /2.1/ eine ausführliche Zusammenstellung möglicher Rechenansätze sowohl zur Abbildung der Verformungs- als auch des Bruchverhaltens des Werkstoffs Beton.

Da Beton nur bis zu ca. 30% der Bruchlast ein nahezu lineares Spannungs-Verzerrungs-Verhalten aufweist, beschreibt die Mehrzahl der in der jüngsten Vergangenheit erschienenen Veröffentlichungen numerische Approximationen der in Versuchen beobachteten Phänomene mit nichtlinear-elastischen Ansätzen, wobei die zugrundegelegten Experimente vorwiegend an bis dahin unbeanspruchtem Beton durchgeführt wurden.

Die dieser Arbeit zugrundeliegende Formulierung für den Werkstoff Beton wurde von Link /2.6/ vorgeschlagen. Sie zeigt gute Übereinstimmung mit den Versuchsergeb-

nissen, die Kupfer /2.2/, /2.3/ aus Versuchen an zweidimensionalen Tragwerken gewonnen hat und bietet den Vorteil, das gesamte zweiachsiale Spannungs-Verzerrungs-Verhalten ohne Bereichsabgrenzung bis zum Bruchzustand zu beschreiben.

Mit den Annahmen und Voraussetzungen -

a) ein elastisches Potential ist vorhanden;
b) Gleitungen sind unabhängig von den Hauptspannungen;
c) es liegt ebene Anisotropie vor, d.h. in Richtung der Normalen zur Ebene wird Isotropie vorausgesetzt;
d) der Schubspannungszustand ist abhängig vom Normalspannungszustand;
e) der Werkstoff verhält sich quasiisotrop, d.h. Einflüsse aus materialabhängiger Anisotropie werden nicht berücksichtigt;
f) Einflüsse aus Langzeitverhalten des Werkstoffs werden nicht berücksichtigt;
g) die Belastungsgeschichte wird nicht berücksichtigt, das Materialverhalten wird als hyperelastisch angenommen;
h) die nichtlinearen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen sind innerhalb von Spannungs- bzw. Verzerrungsinkrementen linearisierbar -

entwickelt Link /2.6/ anhand der Versuchsergebnisse von Kupfer /2.2/, /2.3/ eine auf die Richtung der spannungsabhängigen Anisotropie bezogene Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für den Werkstoff Beton (vgl. Bild 2.1)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E^s_{11}}{1 - \nu^s_{12}\nu^s_{21}} \begin{bmatrix} 1 & \nu^s_{12} & 0 \\ \nu^s_{21} & \frac{\nu^s_{12}}{\nu^s_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu^s_{21}\nu^s_{12}}{1 + 2\nu^s_{21} + \frac{\nu^s_{21}}{\nu^s_{12}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Hierin bedeuten

$\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}$: Spannungen und zugehörige Verzerrungen in Richtung der orthogonalen Hauptachsen "1", "2", welche der beanspruchungsbedingten Anisotropierichtung entsprechen,

E^s_{ii}, ν^s_{ik} : Sekantenwert des Elastizitätsmodul bzw. der Querkontraktionszahl in Richtung der Hauptachsen "1", "2".

Mit Hilfe der Methode des Fehlerquadratminimums approximiert Link die Funktion des Sekantenmoduls E^s_{kk} bezogen auf den Elastizitätsmodul E_o des linear-elastischen Werkstoffs in Abhängigkeit der auf die Betonprismenfestigkeit β_d bezogenen Hauptspannungen σ_{11}, σ_{22}.

Analog wird die Funktion der Sekantenwerte der Querdehnungszahlen ν^s_{ik} approximiert.

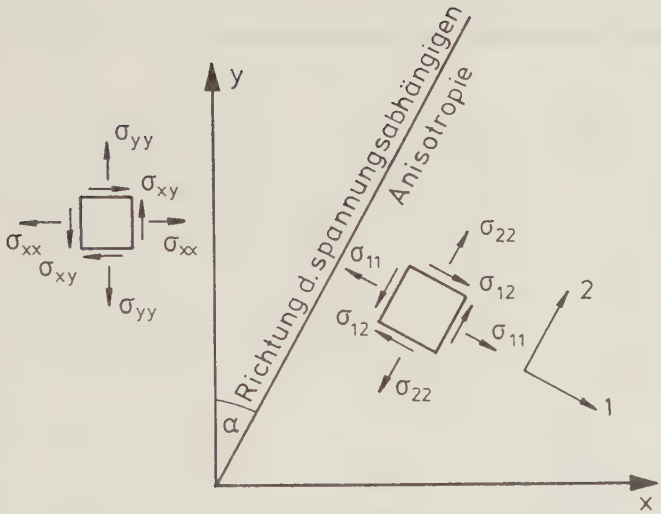


Bild 2.1
Lage der Anisotropierichtung "1", "2" zu den allgemeinen Raumachsen "x", "y".

Im Hinblick auf die numerische Handhabung definiert Link aus den Sekantenwerten der Materialkennwerte E^s_{kk}, ν^s_{ik} mittlere Tangentenwerte E^t_{kk}, ν^t_{ik}. Bild 2.2 zeigt die graphische Darstellung exemplarisch für den Elastizitätsmodul E^t_{kk}.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Tangentenwerte verwendet, wobei im folgenden auf den oberen Index t verzichtet wird.

Die auf die Richtung der Anisotropie bezogenen Werkstoffgesetze müssen auf allgemeine orthogonale Raumrichtungen "x", "y" transformiert werden.

Nach Link /2.6/ gilt in inkrementeller Schreibweise unter Verwendung von Tangentenmoduln

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{xx} \\ \Delta\sigma_{yy} \\ \Delta\sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \cdot \frac{1}{1+2\nu_{21}\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}} \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A12 & A22 & A23 \\ A13 & A23 & A33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ 2\Delta\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Mit

$$A11 = \left(1+2\nu_{21}+\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}\right)\left(\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+$$

$$+\left(2-\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}-\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}\right)\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$A12 = \nu_{12}\left(1+2\nu_{21}+\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}\right)-$$

$$-\left(2-\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}-\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}\right)\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$A13 = \left(-1+\nu_{21}-\nu_{12}+\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}\right)\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha+$$

$$+\left(1+\nu_{21}-\nu_{12}-\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}\right)\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$A22 = (1+2\nu_{21}+\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}})(\sin^2\alpha+\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}\cos^2\alpha)+$$

$$+(2-\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}-\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}})\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$A23 = (-1+\nu_{21}-\nu_{12}+\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}})\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha +$$

$$+(1+\nu_{21}-\nu_{12}-\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}})\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha$$

$$A33 = (1-\nu_{21}\nu_{12})-$$

$$-(2-\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}-\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}})\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha \quad .$$

Hierin bedeuten

$\Delta\sigma_{xx}, \Delta\sigma_{yy}, \Delta\sigma_{xy}$
$\Delta\varepsilon_{xx}, \Delta\varepsilon_{yy}, \Delta\varepsilon_{xy}$: Spannungs- bzw. Verzerrungsinkremente in den Richtungen beliebiger orthogonaler Raumachsen "x", "y",

E_{ii}, ν_{ik} : mittlerer Tangentenwert des Elastizitätsmoduls bzw. der Querkontraktionszahl in Richtung der Hauptachsen "1", "2" der beanspruchungsbedingten Anisotropie,

α : Winkel zwischen der Hauptachse "1" und der allgemeinen Raumachse "x".

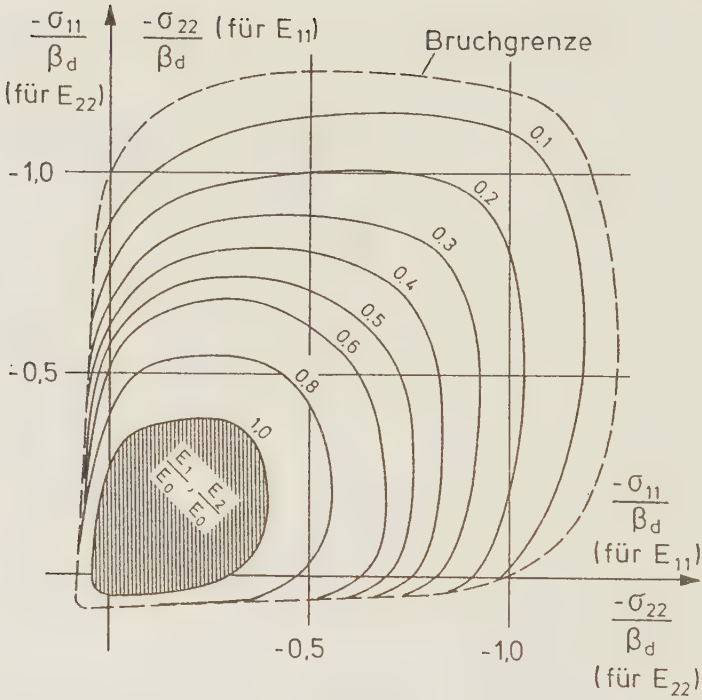


Bild 2.2
Parameterdarstellung der auf den einachsialen Druckversuchswert E_o bezogenen mittleren Tangentenmoduln E_{ii}

2.3 Gerissener Beton

Beanspruchungen, welche die Grenzen der Materialfestigkeit erreichen, führen zu einem Ausfall der Bindungen aus Gleichung (2.2). Der Verlust an Bindungsenergie wird optisch deutlich durch fortlaufende Riß- bzw. Bruchränder.

Die in Frage kommenden drei möglichen Rißkombinationen - ohne die Fälle des ungerissenen und des vollständig gerissenen Betons -

$$\text{I.}\ \sigma_{22} = 0$$

$$\text{II.}\ \sigma_{22} = 0\ ,\ \sigma_{12} = 0$$

$$\text{III.}\ \sigma_{22} = 0\ ,\ \sigma_{11} = 0$$

wurden in orthonormierten Koordinaten von Ebbinghaus in /2.13/, Schäfer, Link, Mehlhorn in /2.15/ sowie Schildberg /2.9/ untersucht.

Wie Versuche bestätigen, reißt der Beton unter Belastung nahezu rechtwinklig zur Richtung der Hauptzugspannungen. Hierbei können durch die rauhe Verzahnung der Rißufer, durch Reibung sowie durch Mitwirken der Bewehrung noch Bindungsenergieanteile erhalten bleiben. Über die Größe der Verzahnungsbeiwerte α_{ii}

$$0 \leq \alpha_{ii} \leq 1 \tag{2.3}$$

zur Berücksichtigung von Normalspannungen in Rissen ist bisher nur wenig bekannt. In Anlehnung an Ebbinghaus /2.13/ wird im folgenden

$$\alpha_{ii} = 0{,}0 \tag{2.4}$$

angenommen.

Die Übertragung der Tangentialspannungen im Riß wird gemäß Hand, Pecknold, Schnobrich /2.16/ durch einen konstanten Verzahnungsbeiwert

$$\alpha_{ik} = 0.4 \tag{2.5}$$

abgemindert. Diese grobe Annahme erscheint gerechtfertigt in Anbetracht der zahlreichen Einflußparameter, die in Versuchen stark streuende Werte liefern, wie z.B. Verbund, Verdübelungskräfte, Schlupf, deren Einfluß auf die Ausbildung der Rißweite und der Rißabstände sowie die Art der Beanspruchung.

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.4) und (2.5) läßt sich Gleichung (2.1) für Beton, der in einer Richtung gerissen ist, schreiben:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{12}G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Hierin bedeuten:

G :Schubmodul des isotropen Werkstoffs Beton,

α_{ik} :Verzahnungsbeiwert (= 0,4).

Die auf die Rißrichtung bezogene Gleichung (2.6) läßt sich mit Transformationsregeln aus der angegeben Literatur auf beliebige Raumrichtungen "x" und "y" beziehen.

Durch die geänderten Steifigkeiten sind die Hauptspannungsrichtungen, die zu einem weiteren Riß führen, nicht notwendigerweise um 90° gegenüber dem ersten Riß gedreht. Da in diesem Fall jedoch angenommen wird, daß gilt:

$$\alpha_{12} = 0.0 \tag{2.7}$$

fallen alle drei Bindungen aus.

Für die numerische Handhabung bieten sich zwei Möglichkeiten an:

1. Die Beschreibung von Einzelrissen durch Änderungen der Topologie des Systemverhaltens.

Ngo, Scordelis verwenden in /2.10/ dieses Verfahren, indem sie die Bindungen entsprechender Knotenpunkte des Systems bei Überschreiten der Materialfestigkeit lösen.

2. Der gerissene Beton wird wie der ungerissene Beton als Kontinuum betrachtet.

Dieses Verfahren wird von den meisten Autoren bevorzugt (vgl. /2.6/, /2.11/, /2.12/, /2.13/ u.a.). Da es durch die gleichbleibende Topologie Vorteile in der numerischen Handhabung sowohl beim Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix als auch bei der benötigten Rechenzeit bietet, wird es dieser Arbeit zugrunde gelegt.

2.4 Bruchverhalten von Beton unter zweiachsialer Beanspruchung

Um die aus Versuchen gewonnenen Ergebnisse auf die Bestimmung der Bauwerksfestigkeit übertragen zu können, bietet sich zunächst die Anwendung klassischer Bruchhypothesen an. Man geht hierbei davon aus, daß der Bruch des Betons bei Erreichen materialabhängiger Grenzwerte eintritt, wobei die charakteristischen Grenzwerte experimentell bestimmt werden.

Bild 2.3 zeigt die Bedeutung des Nachbruchverhaltens des Betons an diskreten Stellen der Struktur auf die Gesamtstruktur.

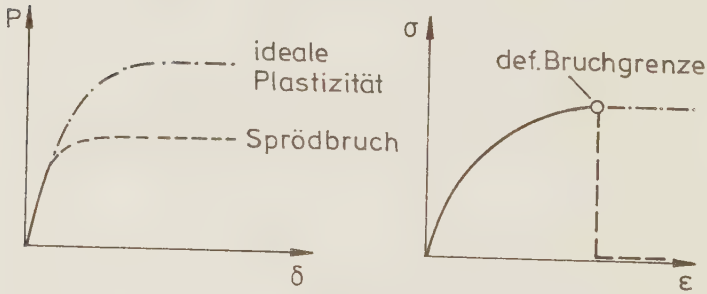


Bild 2.3

a) Verhalten der Gesamtstruktur

b) Werkstoffverhalten

Für zähe Materialien, zu denen auch der Werkstoff Stahl gehört, erscheint die geschilderte Vorgehensweise gerechtfertigt. Das unterschiedliche Verhalten des Betons im Zug- bzw. Druckbereich erfordert eine

Erweiterung der klassischen Bruchhypothesen auf spröde Werkstoffe. Reimann /2.17/, Kupfer /2.18/ sowie Link /2.6/ geben Zusammenstellungen der für Beton erweiterten Bruchhypothesen. Becker /2.4/ sowie Link /2.6/ zeigen jedoch auf, daß auch die erweiterten Bruchhypothesen die mehrachsiale Bruchfestigkeit von Beton nicht hinreichend beschreiben können.

Link /2.6/ schlägt deshalb vor, auf der Grundlage von Versuchsergebnissen das Bruchverhalten des Betons phänomenologisch zu definieren. Als Nachteil dieser Betrachtungsweise gehen Aussagen über das Materialverhalten nach Überschreiten der Bruchgrenze verloren.

Link formuliert in /2.6/ geschlossene Funktionen der Betonbruchgrenze für den gesamten zweiachsialen Spannungs- bzw. Verzerrungsbereich auf der Grundlage der Versuchsergebnisse von Kupfer /2.2/, /2.3/.

Zur Approximation der Versuchswerte als Polynome 7. Grades

$$Y = \sum_{i=0}^{7} A_i \cdot X^i \qquad (2.8)$$

wird die Methode des Fehlerquadratminimums angewandt. Der Verlauf der rechnerischen Bruchkurve wird in der Nähe der Umschlingungsfestigkeit durch eine weitere Ansatzfunktion verbessert. Gl. (2.8) wird damit zu

$$Y = \sum_{i=0}^{7} A_i X^i + A_8 \left(0.594 \sin \frac{\pi X}{1.7} - 0.00192 \tan \frac{\pi X}{3.3} \right) \qquad (2.9).$$

$$Y = \sum_{i=0}^{7} A_i X^i + A_8 \left(0.594 \sin \frac{\pi X}{1.7} - 0.00192 \tan \frac{\pi X}{3.3} \right)$$

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
0.1203	0.3682	-0.1910	2.8430	-5.4875

A_5	A_6	A_7	A_8
3.7567	-1.0154	0.06664	0.4335

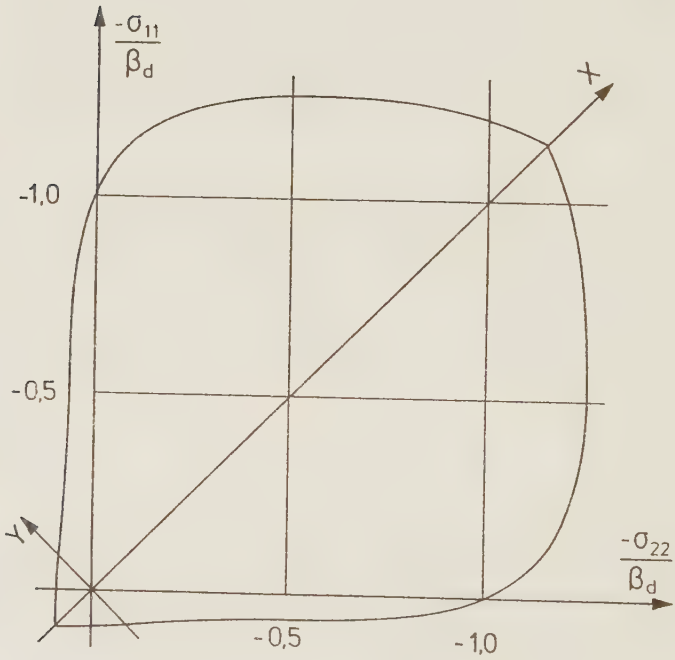


Bild 2.4

Polynomkoeffizienten für Gl. 2.9 und rechnerische Bruchkurve für die zweiachsiale Betonfestigkeit

Die Polynomkoeffizienten sowie einen Vergleich der rechnerischen Bruchkurve mit der experimentell bestimmten Kurve nach Kupfer zeigen die Bilder 2.4 sowie 2.5.

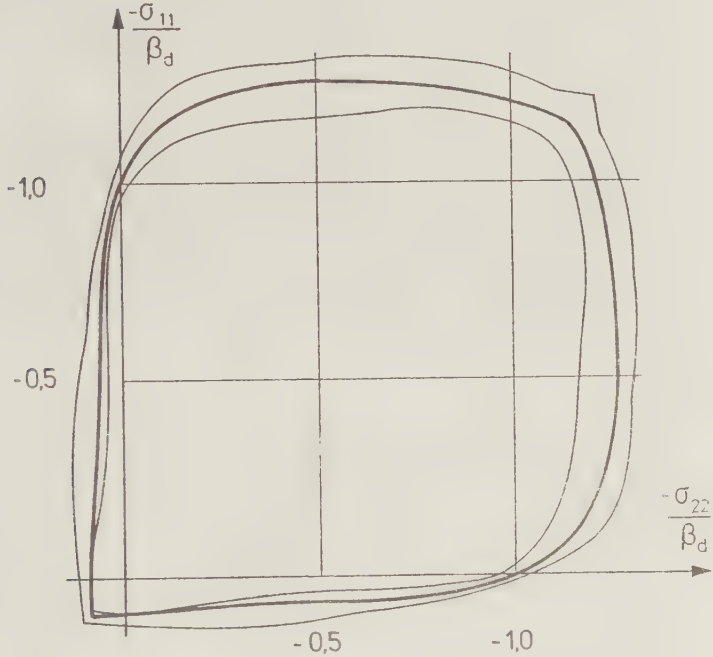


Bild 2.5
Vergleich der Bruchkurve nach Link mit den Vertrauensbereichen der Betone 1,2,3 nach Kupfer

2.5 Spannungs-Dehnungs-Beziehung für einen Bewehrungsstab

Der Baustoff Stahl läßt sich zufriedenstellend genau in seinem Bruchverhalten durch klassische Bruchhypothesen und in seinem Verformungsverhalten durch Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen beschreiben, die aus Versuchsergebnissen approximiert werden.

Da in Stahlbetontragwerken nur Bewehrungsstäbe verwendet werden, reicht es aus, das Materialgesetz für Stahl bei einachsiger Beanspruchung zu kennen. Für die meist verwendeten Stahlsorten, unbehandelter sowie kaltverformter Stahl, sind die Spannungsdehnungs-Beziehungen in Bild 2.6 qualitativ dargestellt.

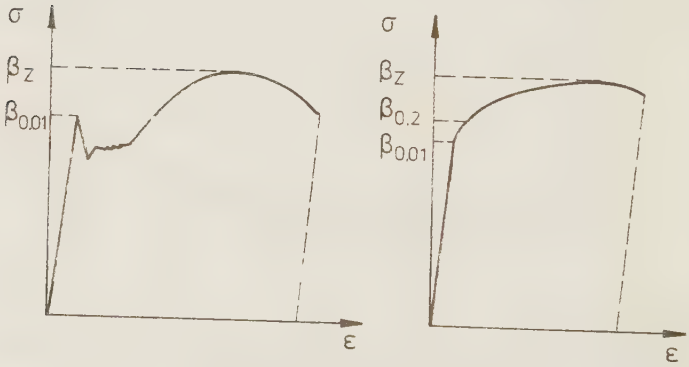


Bild 2.6
a) Unbehandelter Stahl b) Kaltverformter Stahl
Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für Betonstahl

Bis kurz vor Erreichen der Fließspannung verhalten sich Betonstähle linear elastisch. Kaltverformte Stähle weisen im Vergleich mit unbehandelten Stählen keine ausgeprägte Fließgrenze auf. Diese wird deshalb als diejenige Spannung definiert, bei der die Dehnung den Wert 2‰ erreicht.

In der Literatur wird im allgemeinen ein linear-elastisches, ideal-elastoplastisches oder bilineares Verhalten als rechnerische Spannungs-Dehnungs-Beziehung angenommen. Dieser Arbeit liegt eine bilineare Formulierung für Betonstabstahl zugrunde, die mit den Versuchswerten für kaltverformte Stähle in weiten Bereichen Übereinstimmung zeigt (Bild 2.7)

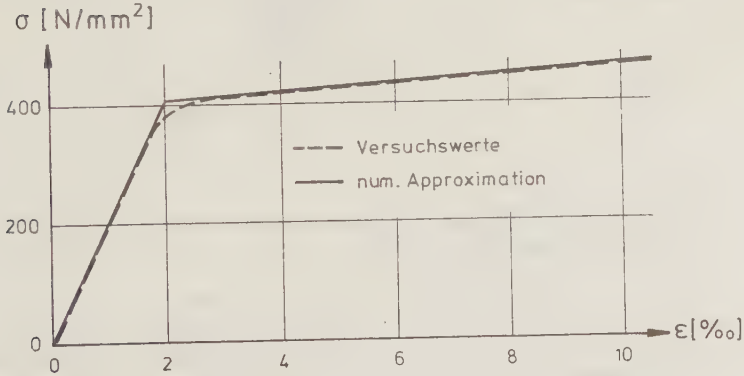


Bild 2.7
Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines kaltverformten Stahls (BSt 420/500)

2.6 Flächenhaft angeordnete Bewehrung

In der Literatur wird nur von wenigen Autoren die Bewehrung in Stahlbetontragwerken durch Einzelstäbe in der numerischen Abbildung dargestellt. Im allgemeinen wird die Bewehrung in verschmierter Form als flächenhaftes Kontinuum abgebildet, vgl. /2.7/, /2.9/, /2.13/, /2.14/ u.a.. Bei diesem Modell wird der Einfluß des Durchmessers, des Abstandes der Bewehrungsstäbe sowie die lokale Spannungsverteilung explizit nicht berücksichtigt.

Für die als gleichförmig verteilte, in Richtung der Bewehrungsstäbe gerichtete Stahlschicht errechnet sich die Dicke wie folgt:

$$t_s = \mu \cdot d \tag{2.10}$$

Hierin bedeuten:

μ = Bewehrungsgrad,

d = Querschnittsdicke.

Das Stoffgesetz für eine Bewehrungsschar in einem beliebig gerichteten zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (Bild 2.8) lautet in inkrementeller Schreibweise unter Verwendung von Tangentenmoduln:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{xx} \\ \Delta\sigma_{yy} \\ \Delta\sigma_{xy} \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} c^4 & c^2s^2 & c^3s \\ c^2s^2 & s^4 & cs^3 \\ c^3s & cs^3 & c^2s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ 2\Delta\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \qquad (2.11).$$

Hierin bedeuten:

c : $\cos\alpha$,

s : $\sin\alpha$,

E_s : Tangentenwert des Elastizitätsmodul für Stahl.

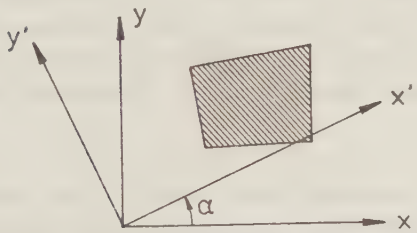


Bild 2.8
Bezugssysteme der Bewehrungselemente

Mit (2.10) und (2.11) kann jede beliebig gerichtete Bewehrungslage durch eine verschmierte Stahlschicht ersetzt werden.

2.7 Verbundverhalten von Beton und Bewehrung

2.7.1 Grundgleichungen des Verbundverhaltens

Die Wechselwirkung zwischen den Komponenten Stahl

und Beton wird im wesentlichen durch die Qualität des Verbundes beeinflußt. Die Verbundeigenschaften sind bedeutsam für die Verteilung der Risse, die Rißweite und damit der Korrosionsstandfestigkeit des Betonstahls sowie für die Beteiligung des Betons an der Aufnahme von Normalspannungen zwischen den Rissen. Im ungerissenen Zustand ist das Verbundverhalten in der numerischen Abbildung durch lineare Ansätze genügend genau zu erfassen, d.h. idealer Verbund zwischen Beton und Bewehrung kann angenommen werden . Im gerissenen Zustand behindert der Betonstahl die gegenseitige Entfernung der Rißufer. Er übernimmt die Kraftübertragung zwischen den Rißufern. Zwischen den Rissen beteiligt sich der Beton mit Hilfe des Verbundes an der Aufnahme von Zugspannungen (Tension Stiffening Effect).

Wegner zeigt in /2.11/ an Stahlbetonplatten, daß der Einfluß aus dem Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen mit abnehmendem Bewehrungsprozentsatz μ ansteigt. Die numerische Abbildung schwach bewehrter Stahlbetontragwerke darf zur wirklichkeitsnahen Beschreibung des Tragwerkverhaltens diesen Einfluß nicht vernachlässigen.

Die meisten neueren Untersuchungen, z.B. /2.20/ bis /2.26/, berücksichtigen die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen durch Einführung von gemittelten Beton- oder Stahlzugkomponenten. Ausgehend von mittleren Dehnungen der Bewehrung ε_{sm} bzw. des Betons in der Verbundzone zwischen Stahl und Beton $\varepsilon_{bs,m}$ werden mittlere Stahlspannungen σ_{sm} bzw. Betonspannungen $\sigma_{bs,m}$ in Abhängigkeit eines mittleren Rißabstands a_m ermittelt (siehe Bild 2.9).

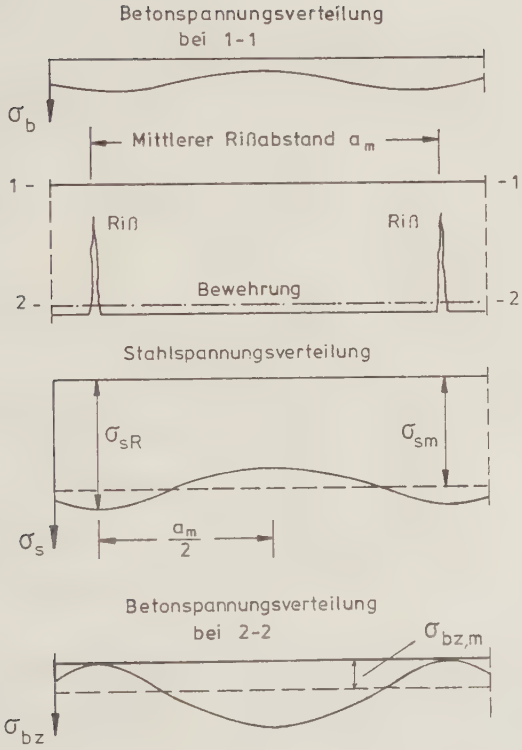


Bild 2.9
Spannungsverteilung im Bereich zwischen den Rissen
(schematische Darstellung)

Der erstmalig von Rao /2.21/ vorgestellte Ansatz zur Beschreibung der mittleren Stahldehnungen

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sR} - k \frac{\beta_{bz}}{E_s \mu} \tag{2.12}$$

und dem Beiwert

$$k = 0.18 \frac{\sigma_{sR,1}}{\sigma_{sR}} ,$$

mit

$\varepsilon_{sR}, \sigma_{sR}$: Stahldehnung bzw. -spannung am Riß ohne Berücksichtigung von Betonzugspannungen

β_{bz} : Biegezugfestigkeit des Betons

E_s : Sekantenwert des Elastizitätsmodul für den Werkstoff Stahl

μ : Bewehrungsgrad

$\sigma_{sR,1}$: Stahlspannung am Riß bei Erstrißbildung,

enthält die Annahme, daß die Dehnungsdifferenz zwischen der Dehnung im ungerissenen Zustand I und dem vollgerissenen Zustand II mit wachsender Beanspruchung linear abnimmt. Ein Vergleich (Bild 2.10) mit Versuchsergebnissen aus /2.27/ zeigt, daß eine Beschreibung des Übergangs vom Zustand I in den Zustand II durch Verfahren auf der Grundlage der Gleichung (2.12) nicht möglich ist. Berechnungsverfahren, die das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken bei Laststeigerung genauer erfassen, wurden z.B. von Koch /2.22/ vorgestellt und von Svensvik /2.26/ weiter entwickelt.

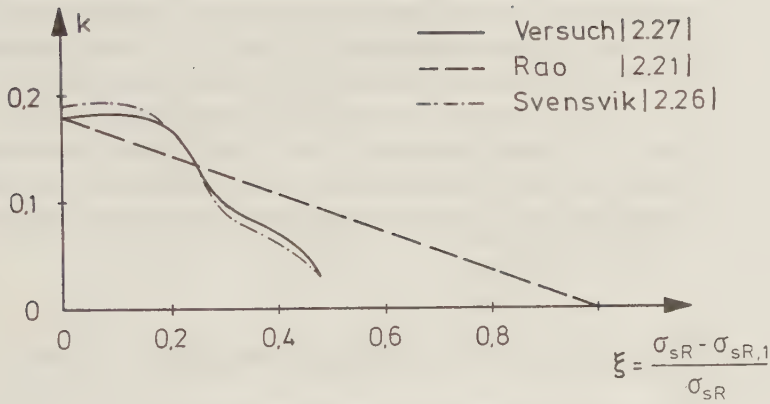


Bild 2.10
Mitwirkung des Betons auf Zug
Vergleich verschiedener Verfahren mit Versuchsergebnissen

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundlagen des von Koch in /2.22/ entwickelten k_v-Verfahrens übernommen. Die von Koch abgeleiteten Momenten-Krümmungs-Beziehungen sind jedoch wegen ihrer Abhängigkeit von der Tragwerksgeometrie mit dem gewählten Integrationsverfahren über die Tragwerksdicke nicht kompatibel. Als numerisch sehr aufwendig erweist sich das von Koch vorgeschlagene iterative Verfahren zur Bestimmung des Betonzugspannungsverlaufes zwischen den Rissen bei der Anwendung auf beliebige Querschnittsgeometrien.

Im folgenden Kapitel wird deshalb zunächst kurz auf die physikalischen Vorgänge bei der Rißentwicklung eingegangen. Zur Anwendung in der numerischen Beschreibung des Stahlbetonmodells wird aus den Grundgleichungen von Koch /2.22/ ein Verfahren entwickelt, welches die Verzerrungen der Biegezugzone näherungsweise erfaßt. Da dieses Verfahren kompatibel mit dem gewählten Integrationsverfahren ist, werden die Verzerrungen der Biegedruckzone über Gleichgewichtsbeziehungen iterativ berücksichtigt.

2.7.2 Rißentwicklung und Berücksichtigung in der Analysis

Bis zum Erreichen einer Beanspruchung, die zu ersten Rissen führt, zeigen Stahlbetontragwerke lineare Kraft-Verformungs-Zusammenhänge (Bereich I, Bild 2.11). Während der Erstrißbildung existieren beiderseits der Eintragungslängen, in denen die Betonzugspannungen durch die Verbundwirkung aufgebaut werden, ungestörte Tragwerksabschnitte (Bereich II, Bild 2.11 und 2.12). Mit wachsender Belastung nehmen die Betonzugspannungen zwischen den Rissen bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit zu. Innerhalb des bisher ungestörten Abschnitts treten weitere Risse auf.

Der Ort eines Sekundärrisses ist deterministisch nicht zu erfassen, da er vorrangig von den Verteilungen der Werkstoffinhomogenitäten, insbesondere der Betonzugfestigkeit innerhalb des ungestörten Abschnitts, abhängt. Im folgenden wird deshalb eine probabilistische Vorgehensweise, wie sie Koch /2.22/ vorschlägt, gewählt.

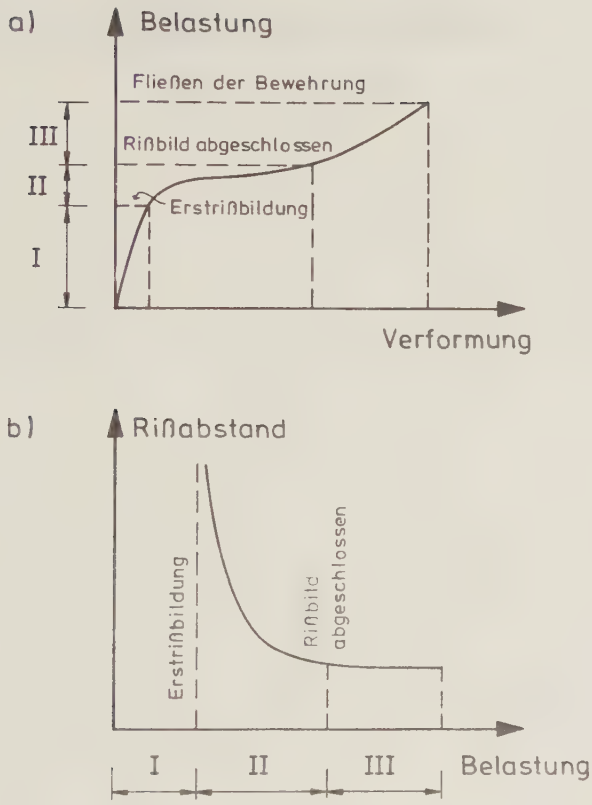


Bild 2.11
Qualitativer Verlauf der
a) Belastungs-Verformungs-Beziehung,
b) Rißabstand-Belastungs-Beziehung
innerhalb der Belastungsabschnitte I, II, III

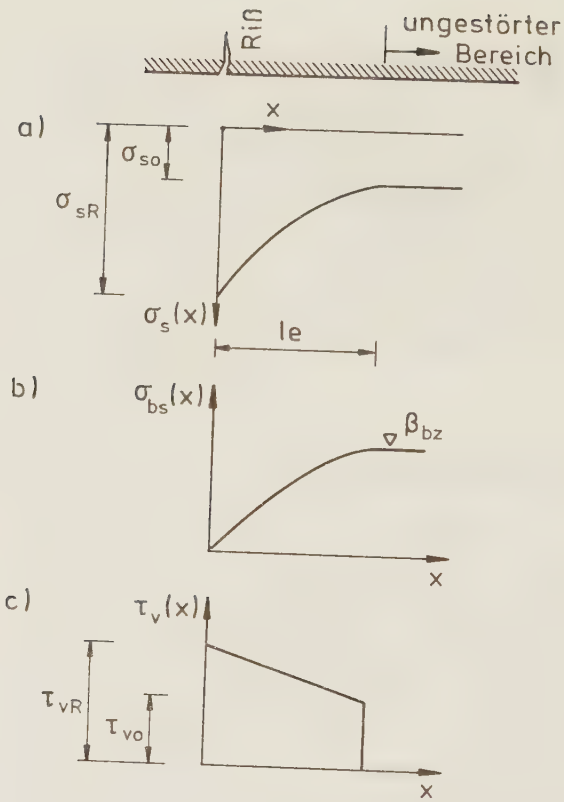


Bild 2.12

a) Stahlspannungsverlauf,

b) Betonzugspannungsverlauf und

c) idealisierter Verbundspannungsverlauf im Bereich II (nicht abgeschlossenene Rißbildung)

Innerhalb eines definierten nutzbaren Bereiches der Betonzugfestigkeit

$$\Delta \beta_{bz} = \beta_{95} - \beta_5 \tag{2.13}$$

mit

β_5, β_{95} : 5-% bzw. 95-% Fraktilenwert der Betonzugfestigkeit β_{bz},

kann nach Koch /2.22/ eine Normalverteilung angenommen werden. Mit dem Mittelwert der Zugfestigkeit

$$\beta_{bz,m} = \frac{\beta_5}{1 - t \cdot v} \tag{2.14}$$

hierin ist

t : Beiwert (t = 1,65),

v : Variationskoeffizient,

ergibt sich Gleichung (2.13) zu

$$\Delta \beta_{bz} = 2 \beta_{bz,m} t \cdot v \tag{2.15}$$

Koch /2.22/ gibt für einen beliebigen Belastungszustand die maßgebende Betonzugfestigkeit in Abhängigkeit von den Stahlspannungen an:

$$\beta_{bz,i} = \beta_5 + \left(\frac{\sigma_{sR} - \sigma_{sR.1}}{\beta_{s\,0,2} - \sigma_{sR.1}} \right)^n \cdot \Delta \beta_{bz} \tag{2.16}$$

Hierin ist

$\beta_{bz,i}$: Betonzugfestigkeit für den Belastungszustand i,

σ_{sR} : Stahlspannung am Riß im Belastungszustand i,

$\sigma_{sR,1}$: Stahlspannung am Riß im Belastungszustand mit Erstrissen,

$\beta_{so,2}$: Streckgrenze des Bewehrungsstahls,

n : Beiwert.

Koch /2.22/ führt in Gl. (2.15) und (2.16) die Werte v = 10% und n = 1 ein. Svensvik /2.26/ zeigt jedoch, daß

$$v = 20\%$$
$$\text{und } n = 0{,}5$$

bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen ergeben.

Der mittlere Abstand eines Risses des Belastungszustandes i von einem Riß des Belastungszustandes i -1 ergibt sich nach Koch /2.22/ und den Werten v und n nach Svensvik /2.26/ zu

$$a_m = \frac{2\,l_e}{1-p} \qquad (2.17).$$

Hierin ist

a_m : mittlerer Rißabstand,

l_e : Eintragungslänge der Verbundspannungen,

p : Wahrscheinlichkeit der Existenz eines ungestörten Tragwerkabschnittes (vgl. (Bild 2.13)).

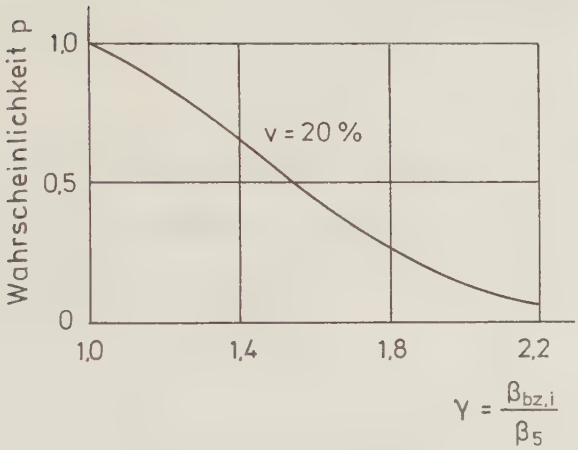


Bild 2.13
Wahrscheinlichkeit der Existenz eines ungestörten Tragwerksabschnittes

Für $p \rightarrow 0$ wird der Rißabstand minimal

$$a_m \rightarrow 2 l_e$$

Ein weiteres Anwachsen der Belastung läßt das Rißbild unverändert (Bereich III, Bild 2.11 und 2.14)

Zur Bestimmung des Einleitungsbereichs l_e geht Koch /2.22/ von einem idealisierten Verlauf der Verbundspannungen aus, die den Haft- und den Scherverbund

beschreiben (vgl. Bild 2.12)

$$\tau_v(x) = \tau_{vR} - k_v x \qquad (2.18),$$

mit $\tau_{vR} = \tau_{vo} + k_v l_e$

und $\tau_v(x)$: Verbundspannung im Einleitungsbereich,

τ_{vo} : Haftverbundspannung an Stellen mit der Relativverschiebung Null,

k_v : Verbundbeiwert.

Experimentelle Untersuchungen bestätigen einen überwiegend linearen Zusammenhang zwischen der Haftverbundspannung τ_{vo} und der Betonwürfeldruckfestigkeit β_{wm} für Normalbeton

$$\tau_{vo} = a_o \beta_{wm} \qquad (2.19),$$

mit

a_o : Beiwert,

β_{wm} : Mittelwert der Betonwürfeldruckfestigkeit.

Koch schlägt in /2.22/ für den Beiwert a_o in Gleichung (2.19) den konstanten Wert

$$a_o = \frac{1}{15}$$

vor. Aufgrund von Versuchsergebnissen, die für a_o Werte zwischen $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{12}$ anzeigen, erscheint diese Annahme gerechtfertigt.

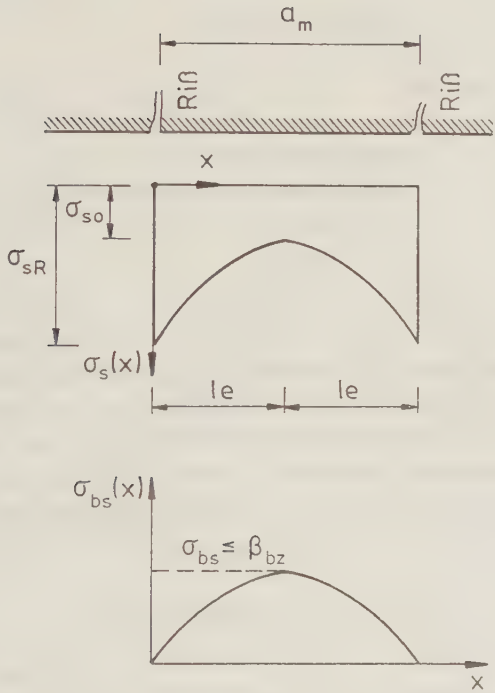


Bild 2.14
Stahlspannungsverlauf und Betonzugspannungsverlauf im Bereich III (abgeschlossene Rißbildung)

Der Verbundbeiwert k_v in Gleichung (2.18) ist abhängig von der Betongüte, Betonart, Bewehrungsstabdurchmesser sowie vom Grad der Beanspruchung. Nach Koch /2.22/ kann

für k_v die Beziehung

$$k_v = k_v(\sigma_{so}) = k_{vo} + k_{v1}\sigma_{so} \tag{2.20}$$

aufgestellt werden,
hierin sind

k_{vo}, k_{v1} : Verbundbeiwerte,
σ_{so} : Anfangsstahlspannung zwischen zwei benachbarten Rissen (z.B. Bild 2.14).

Für die in dieser Arbeit betrachteten Stahlbetontragwerke ist der Bereich der mittleren Betonwürfelfestigkeit β_{wm} zwischen $30\,N/mm^2$ und $60\,N/mm^2$ und der Bewehrungsstabdurchmesser zwischen d_s = 6mm und d_s = 14mm von besonderem Interesse. Innerhalb dieser Bereiche können für die Beiwerte k_{vo} und k_{v1} folgende Beziehungen aufgestellt werden:

$$k_{vo} = 10^{-2}(0{,}092 \cdot \beta_{wm} - 1{,}263)\, e^{-0{,}044 \cdot d_s} \tag{2.21}$$

$$k_{v1} = (0{,}020 \cdot \beta_{wm} + 0{,}5)\, e^{-0{,}059 \cdot d_s} \cdot 10^{-4} \tag{2.22}$$

hierin sind

d_s : Durchmesser des Bewehrungsstabes in mm,
β_{wm} : mittlere Betonwürfeldruckfestigkeit in N/mm^2.

Die Bilder 2.15 und 2.16 zeigen die gute Übereinstimmung im maßgebenden Bereich zwischen den Ergebnissen

der Gleichungen (2.21) und (2.22) und den tabellarisch zusammengefaßten Ergebnissen von Koch /2.22/.

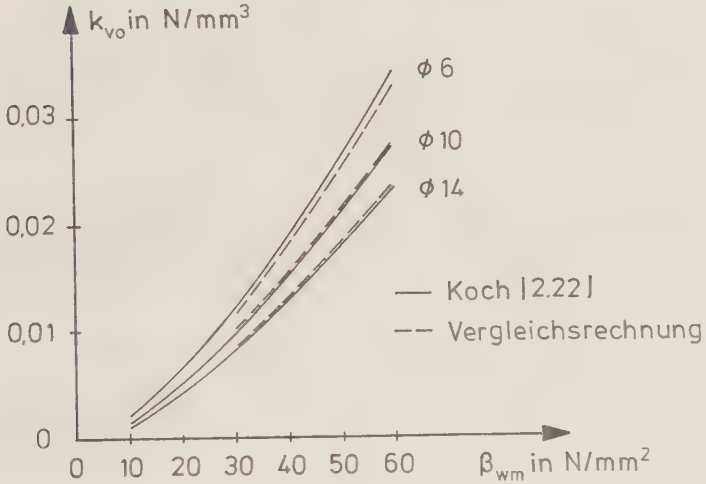


Bild 2.15
Beiwert k_{vo}
Ergebnisse mit Gleichung (2.21) und Koch /2.22/ im Vergleich

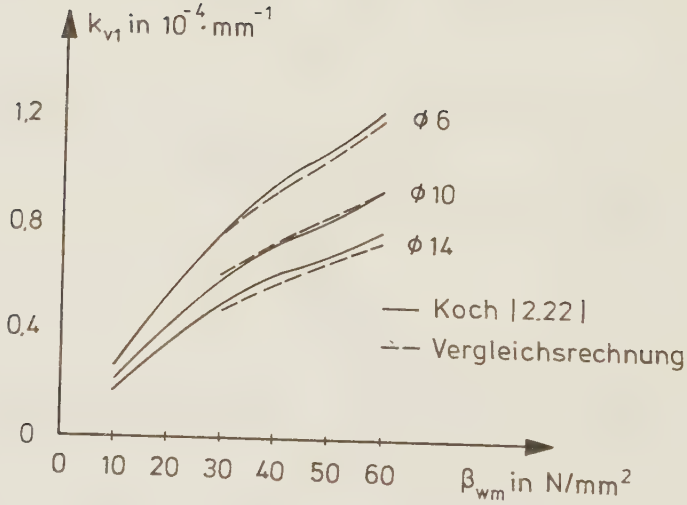


Bild 2.16
Beiwert k_{v1}
Ergebnisse mit Gleichung (2.22) und Koch /2.22/ im Vergleich.

Ausgehend von der Beziehung

$$A_s \frac{d\sigma_s(x)}{dx} = U_s \tau_v(x) \qquad (2.23),$$

mit

A_s : Querschnittsfläche der Bewehrung,
U_s : Umfang aller Bewehrungsstäbe

und dem Koordinantensystem aus Bild 2.17 können mit Gleichung (2.18) die Stahlspannungen im Bereich des gestörten Verbundes durch

$$\sigma_s(x) = \sigma_{sR} - \frac{4\tau_{vR}}{d_s} x + \frac{2k_v}{d_s} x^2 \qquad (2.24)$$

beschrieben werden. Die Gleichungen (2.23) und (2.24) stellen die Veränderung der Stahlzugkräfte über Verbundspannungen dar.

Die individuelle Lastabtragung unterschiedlicher Stahlbetontragwerke und der Einfluß auf die Rißbildung wird gemäß Rostásy /2.27/ durch einen Beiwert

$$S = S(\mu, g)$$

berücksichtigt.
Hierin ist

$\mu = \frac{A_s}{A_b}$: Bewehrungsgrad,

g : Exzentrizität der Normalkraft.

Dieser Beiwert liegt nach Rostásy i.a. zwischen den Werten

$S(\mu, g) = 0{,}2$ für reine Biegung

und $S(\mu, g) = 0{,}5$ für mittigen Zug.

Zur Bestimmung von S ist von der Bildung der Erstrisse auszugehen.

Mit Gleichung (2.24) verhalten sich die Betonspannungen in der Faser der Bewehrung wie

$$S \cdot \sigma_{bs}(x) = -\mu \left(\sigma_s(x) - \sigma_{sR} \right)$$

bzw.

$$S \cdot \sigma_{bs}(x) = \mu \frac{4\tau_{vR}}{d_s} x - \mu \frac{2k_v}{d_s} x^2 \qquad (2.25).$$

Innerhalb der Einleitungslänge

$$l_{es} = \frac{\tau_{vR}}{k_v} - \sqrt{\left(\frac{\tau_{vR}}{k_v}\right)^2 - \frac{d_s}{2k_v}\left(\sigma_{sR} - \sigma_{so}\right)} \qquad (2.26)$$

kann mit Gleichung (2.24) die Stahlspannung im Riß auf die Spannung σ_{so} abgebaut werden (vgl. Bild 2.17). Um die Betonspannungen zwischen den Rissen auf den Wert σ_{bo} aufzubauen, bedarf es der Einleitungslänge

$$l_{eb} = \frac{\tau_{vR}}{k_v} - \sqrt{\left(\frac{\tau_{vR}}{k_v}\right)^2 - \frac{d_s}{2k_v} \cdot \frac{\sigma_{bo}}{\mu} \cdot S} \qquad (2.27).$$

Da Gleichung (2.26) und (2.27) identisch sein müssen, d.h. $l_e = l_{es} = l_{eb}$,

ergibt ein Koeffizientenvergleich

$$\left(\sigma_{sR} - \sigma_{so}\right) = \frac{\sigma_{bo}}{\mu} S \qquad (2.28).$$

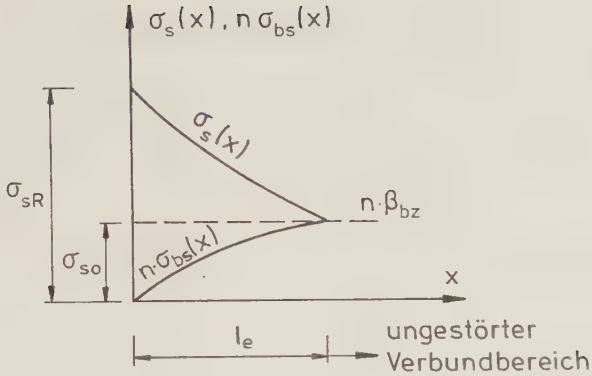


Bild 2.17
Schematischer Verlauf der Stahl- und Betonspannungen
(Diskriminante > 0)

Für die Bildung von Erstrissen ist es notwendig, daß die Betonspannungen am Ende des Einleitungsbereiches die Betonzugfestigkeit erreichen, d.h.

$$S \cdot \sigma_{bs}(x = l_e) = \sigma_{bo} = \beta_{bz} \qquad (2.29).$$

Ferner gilt

$$\sigma_s(x = l_e) = \sigma_{so} = n \cdot \beta_{bz} \qquad (2.30),$$

mit

$n = \frac{E_s}{E_b}$: Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Stahl und Beton.

Damit ergibt sich aus Gleichung (2.28) und

$$\dot{\sigma}_{sR,1} = \sigma_{sR}$$

für Erstrisse:

$$S = \frac{\mu \cdot \sigma_{sR,1}}{\beta_{bz}} - \mu n \qquad (2.31).$$

Für die Entstehung weiterer Risse ist in den Gleichungen (2.24) bis (2.3O) die Betonzugfestigkeit $\beta_{bz,i}$ nach Gleichung (2.16) maßgebend. Im Bereich II (nicht abgeschlossene Rißbildung) besitzt Gleichung (2.27) nur dann eine reele Wurzel, wenn die Diskriminante ≥ 0 ist. Mit Gleichung (2.18) existieren für

$$\tau_{vR} = \tau_{vo} + k_v(n \cdot \beta_{bz,i}) \cdot l_e \geq \sqrt{\frac{d_s k_v(n \cdot \beta_{bz,i})}{2} \cdot \frac{\beta_{bz,i}}{\mu} \cdot S} \qquad (2.32)$$

Bereiche ungestörten Verbundes, sodaß sich die mittlere Rißweite a_m nach Gleichung (2.17) ergibt.

Die gemittelten Stahl- und Betonspannungen lassen sich

mit

$$\sigma_{sm} = \left(\int_0^{l_e} \sigma_s(x)\,dx + \sigma_{so}^{*} c\right) \cdot \frac{2}{a_m} \tag{2.33}$$

bzw.

$$\sigma_{bs,m} = \left(\int_0^{l_e} \sigma_{bs}(x)\,dx + \sigma_{bo}^{*} c\right) \cdot \frac{2}{a_m} \tag{2.34}$$

ermitteln.

Hierin sind

$2\,c = a_m - 2l_e$:die Länge des ungestörten Verbundbereiches und

$\sigma_{so}^{*}, \sigma_{bo}^{*}$:die Stahl- bzw. Betonspannungen im ungestörten Verbundbereich.

Bild 2.18 veranschaulicht den Verlauf der Stahlspannungen zwischen den Rissen und zeigt die mittleren Stahlspannungen, die der weiteren Berechnung zugrunde liegen im Koordinatensystem des Bildes 2.19.

Für den Fall, daß sich die Diskriminante der Gleichung (2.32) $\leq$ 0 ergibt, erweist es sich als sinnvoll, den Ursprung des Koordinatensystems aus Bild 2.17 zu verlagern (Bild 2.19).

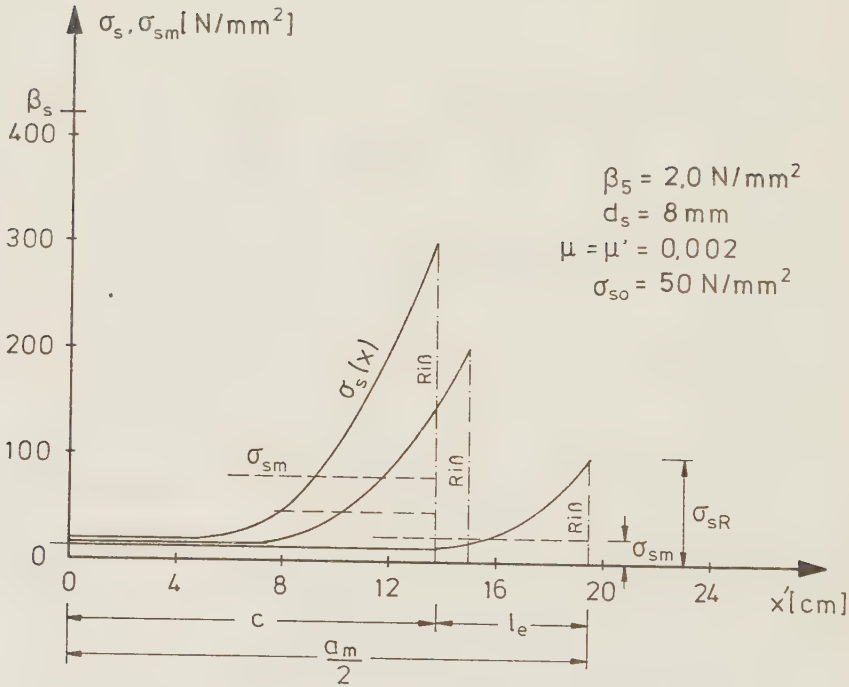


Bild 2.18
Verlauf der Stahlspannungen $\sigma_s(x)$ zwischen zwei Rissen für unterschiedliche Stahlspannungen im Riß σ_{sR}

Mit der Beziehung

$$\sigma_s(x') = \sigma_{so} + \frac{4\tau_{vo}}{d_s} x' + \frac{2k_v}{d_s} x'^2 \qquad (2.35)$$

für den Verlauf der Stahlspannungen und

$$S \cdot \sigma_{bs}(x') = \sigma_{bo} - \mu\,[\sigma_s(x') - \sigma_{so}] \qquad (2.36)$$

für den Verlauf der Betonspannungen ergibt sich die letztmögliche Rißbildung bei einer minimalen Einleitungslänge der Verbundspannungen

$$l_e = -\frac{\tau_{vo}}{k_v} + \sqrt{\left(\frac{\tau_{vo}}{k_v}\right)^2 + \frac{d_s}{2k_v} \cdot \frac{\beta_{bz,i}}{\mu} \cdot S} \qquad (2.37).$$

Im Bereich III (abgeschlossene Rißbildung) gilt mit Gleichung (2.37)

$$l_e^{min} = \frac{1}{2}\, l_e \qquad (2.38)$$

und

$$a_m^{min} = 2\, l_e^{min} \qquad (2.39).$$

Die Anfangsstahlspannung σ_{so} läßt sich durch Einsetzen der Gleichung (2.37) in Gleichung (2.24) ermitteln. Da für den Verbundbeiwert $k_v = k_v(\sigma_{so})$ gilt, ist Gleichung (2.37) nicht geschlossen lösbar.

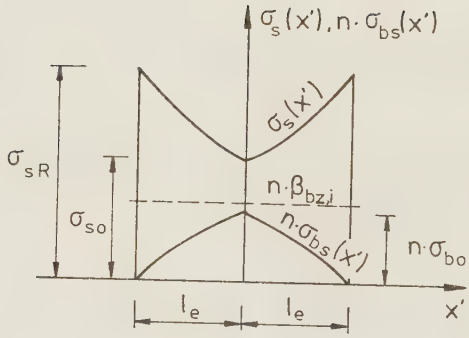


Bild 2.19
Schematischer Verlauf der Stahl- und Betonspannungen (Diskriminante ≤ 0)

Die gemittelten Stahl- und Betonspannungen ergeben sich zu

$$\sigma_{sm} = \frac{2}{a_m^{min}} \int_0^{l_e^{min}} \sigma_s(x')\,dx' \qquad (2.40)$$

bzw.

$$\sigma_{bs,m} = \frac{2}{a_m^{min}} \int_0^{l_e^{min}} \sigma_{bs}(x')\,dx \qquad (2.41).$$

Aus den Gleichungen (2.33) und 2.34) sowie (2.40) und (2.41) lassen sich mit

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sm}}{E_s} \qquad (2.42)$$

und $$\varepsilon_{bs,m} = \frac{\sigma_{bs,m}}{E_b} \qquad (2.43)$$

die gemittelten Stahl- bzw. Betonverzerrungskomponenten berechnen.

Hierin sind

E_s, E_b : Sekantenwerte der Elastizitätsmoduln für den Werkstoff Stahl und Beton.

Zur Bestimmung der mittleren Rißbreite w_m kann von den Relativverschiebungen zwischen Stahl und Beton im Einleitungsbereich ausgegangen werden. Unter Vernachlässigung der Betonverschiebungen ist

$$w_m \approx 2 \cdot l_e \varepsilon^*_{sm} \qquad (2.44),$$

mit

ε^*_{sm} : mittlere Stahldehnung im Einleitungsbereich.

2.7.3 Darstellung der Ergebnisse

Zur Überprüfung der durch Gleichung (2.18) idealisierten Verbundspannungsverteilung und der Einfluß auf den Stahlspannungsverlauf zeigen die Bilder 2.20 und 2.21 einen Vergleich der eigenen Lösung mit Zugversuchen an Stahl-

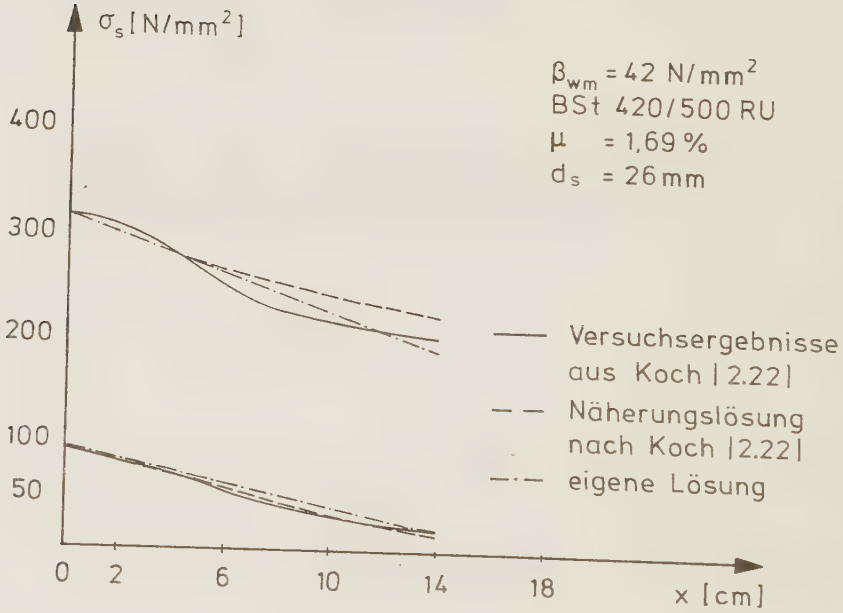


Bild 2.20
Vergleich von gerechneten und gemessenen Stahlspannungen innerhalb des Einleitungsbereiches

betonzylindern nach /2.22/. Trotz der in dieser Arbeit gemachten Einschränkung auf Bewehrungsdurchmesser bis d_s = 14mm sind die Abweichungen gering. In Bild 2.21 wird der Einfluß der Anfangsstahlspannung σ_{so} auf den Stahlspannungsverlauf veranschaulicht.

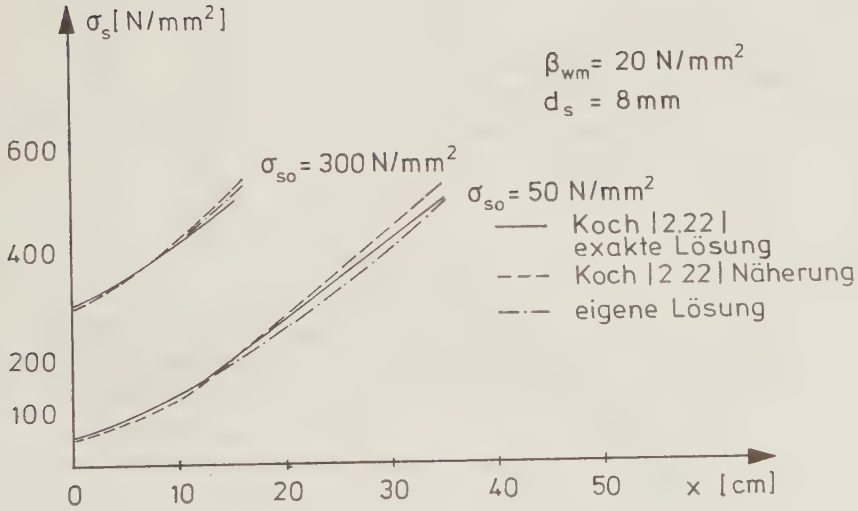


Bild 2.21
Verlauf der Stahlspannungen innerhalb des Einleitungsbereiches nach Koch /2.22/ und eigener Lösung

Der Einfluß der auf den Bewehrungsgrad bezogenen Bewehrungsstabdurchmesser sowie der Stahlspannungen im Riß auf die mittlere Rißweite wird durch die Bilder 2.22 und 2.23 dargestellt. Dem Bild 2.23 liegt der Variationskoeffizient v = 20% zugrunde. Die von Rehm und Martin in /2.28/ vorgeschlagene lineare Beziehung

$$a_m = 4{,}5 + 0{,}025 \frac{d_s}{\mu}$$

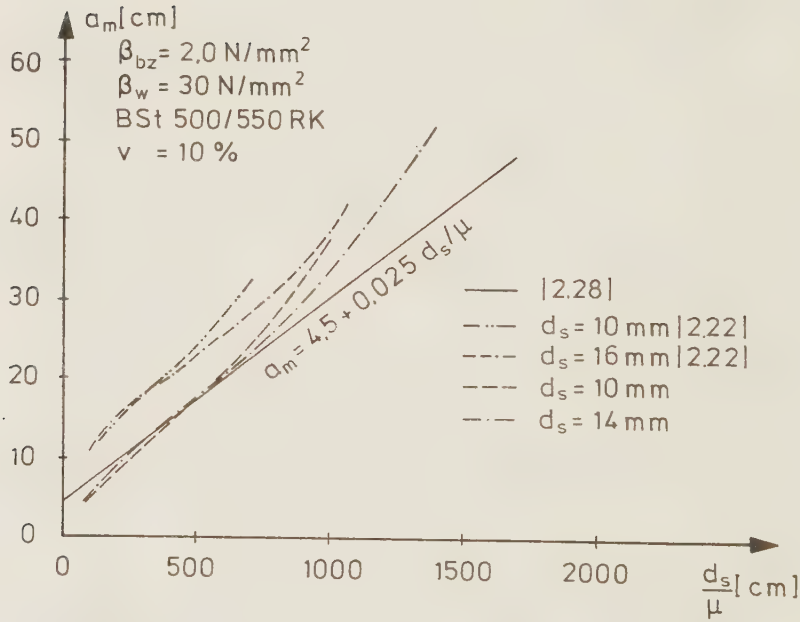


Bild 2.22
Rißabstände bei abgeschlossenem Rißbild
Vergleich verschiedener Verfahren

basiert auf der Grundlage von Versuchsergebnissen. Sie überschätzt jedoch insbesondere für große Verhältnisse von d_s/μ und kleinem Bewehrungsstabdurchmesser die Verbundeigenschaften. Bild 2.23 veranschaulicht den Einfluß des Bewehrungsgrades auf die Erstrißspannung sowie die Ausprägung des Rißbildes mit wachsender Beanspruchung.

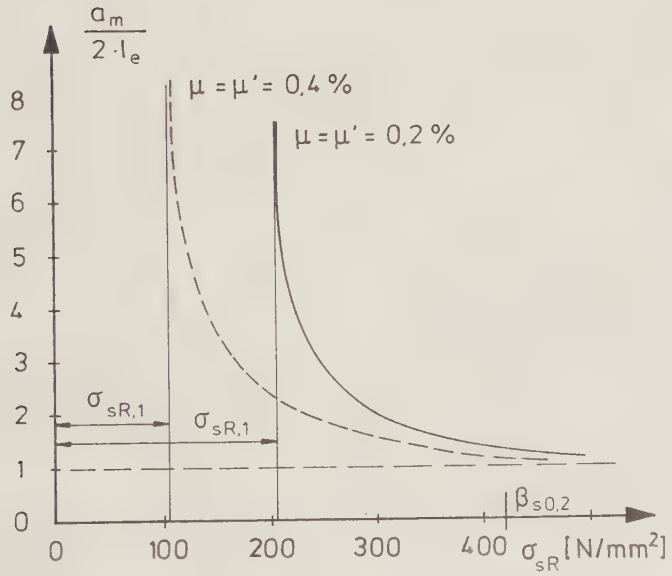


Bild 2.23
Bezogene Rißweite a_m in Abhängigkeit von der Stahlspannung im Riß für unterschiedliche Bewehrungsgrade μ, μ'

Dem Beiwert k nach Rao /2.21/ aus Gleichung (2.12) entspricht die Beziehung

$$k = (\sigma_{sR} - \sigma_{sm}) \cdot \frac{\mu}{\beta_{bz}} \quad .$$

Dieser Beiwert kann als Maß für die Mitwirkung des Betons auf Zug angesehen werden.

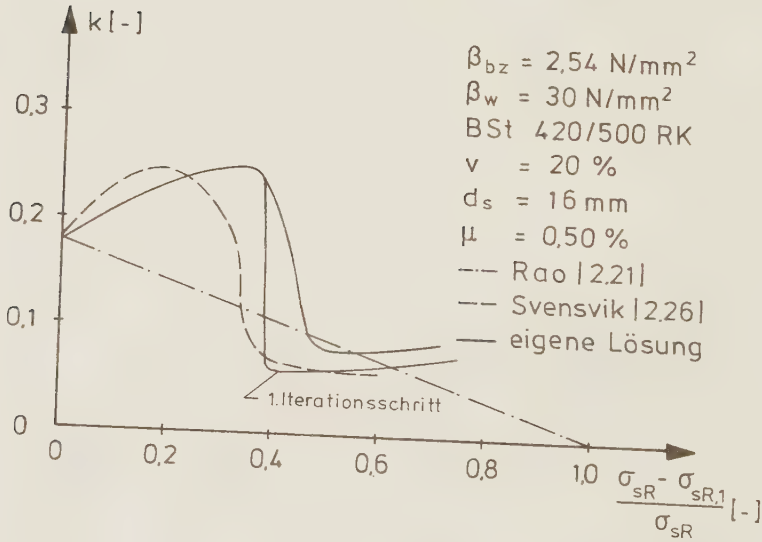


Bild 2.24
Mitwirkung des Betons auf Zug nach Rao /2.21/, Svensvik /2.26/ und eigener Rechnung

Der Verlauf von k in Abhängigkeit des Beanspruchungsgrades

$$\xi = \frac{\sigma_{sR} - \sigma_{sR,1}}{\sigma_{sR}}$$

ist im Bild 2.24 im Vergleich mit den Ergebnissen von Svensvik /2.26/ sowie im Bild 2.25 mit den Ergebnissen von Koch /2.22/ dargestellt. Die lineare Beziehung von Rao /2.21/ wird vergleichend gezeigt. Es ist ersichtlich, daß bereits mit einem Iterationsschritt zur Ermittlung der Anfangsstahlspannung σ_{so} im Bereich III (abgeschlossene Rißbildung) der Verlauf des Beiwertes k sinnvoll abgebildet werden kann.

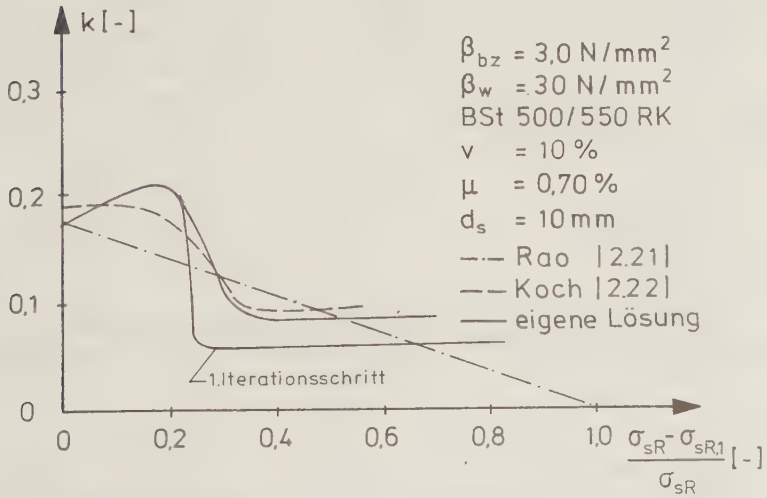


Bild 2.25
Mitwirkung des Betons auf Zug nach Rao /2.21/, Koch /2.22/ und eigener Rechnung

Einen Vergleich der Stahlspannungen im Riß σ_{sR} mit den mittleren Stahlspannungen σ_{sm} stellen die Bilder 2.26 und 2.27 dar. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse von Koch /2.22/ mit eigenen Berechnungen (Bild 2.26) zeigt auf, daß Koch für das abgeschlossene Riß-

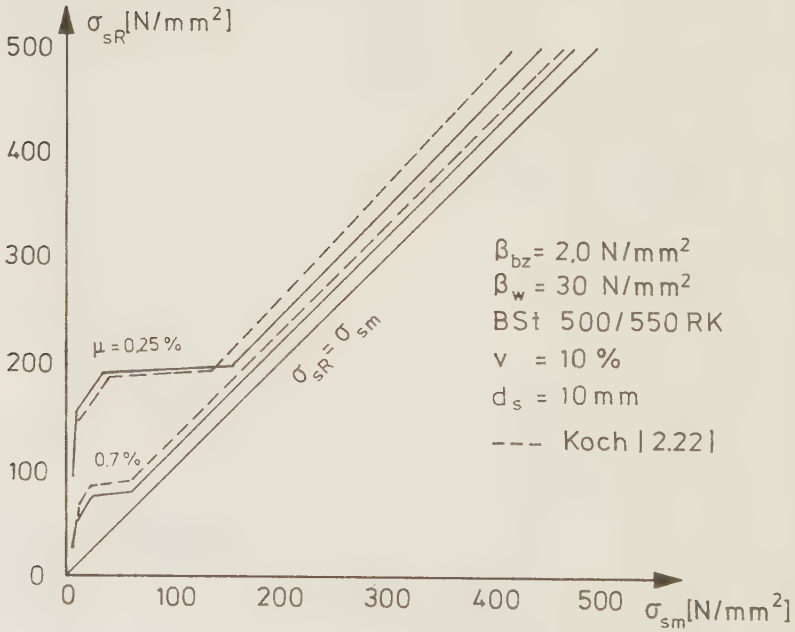


Bild 2.26
Mittlere Stahlspannung bei unterschiedlichen Bewehrungsgraden im Vergleich mit Koch /2.22/

bild die mittleren Stahlspannungen unterschätzt; dieses ist auch in Bild 2.22 zu erkennen. Es ist ersichtlich, daß sich sowohl mit kleiner werdenem Bewehrungsgrad, aber auch mit anwachsender Betonzugfestigkeit der Einfluß des Betons auf Zug zwischen den Rissen vergrößert.

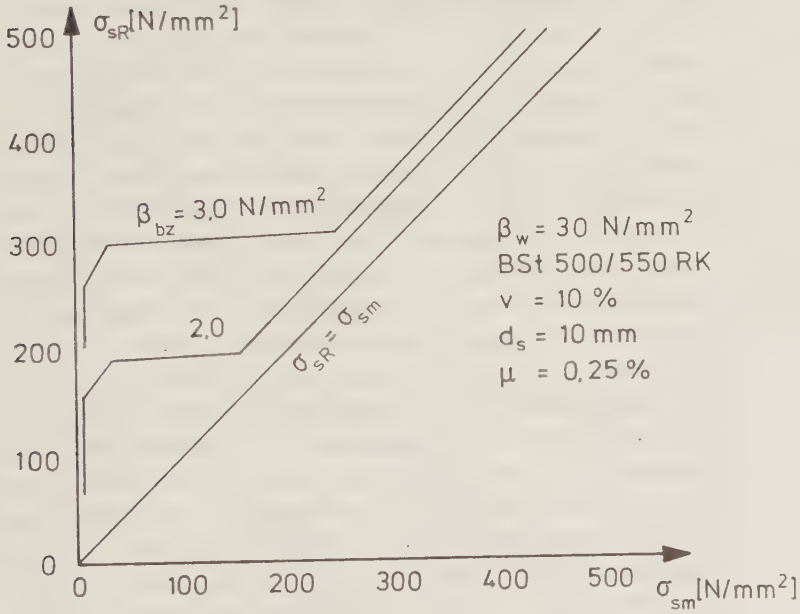


Bild 2.27
Mittlere Stahlspannung bei unterschiedlichen Betonzugfestigkeiten

3. Finite-Element-Beschreibung

3.1 Allgemeines

Im folgenden Kapitel wird ein finites Element zur nichtlinearen Berechnung von allgemeinen Platten- und Schalentragwerken aus Stahlbeton vorgestellt.

Das von Ergaitoudis in /3.1/ entwickelte Element basiert auf einem isoparametrischen dreidimensionalen Konzept (vgl. Bild 3.1a). Ahmad, Irons und Zienkiewicz degenerieren in /3.2/ dieses dreidimensionale Element zu einem dicken Schalenelement, das jedoch in dünnen Schalen- und Platten die transversalen Schubverzerrungsanteile überschätzt. Die weitere Entwicklung verläuft über Zienkiewicz u.a. /3.3/, Pawsey und Clough /3.4/, Razzaque /3.5/ sowie Irons und Razzaque /3.6/, die eine selektive Reduktion der Integrationsordnung vorschlagen, um die Schubverzerrungsanteile zu unterdrücken. Dieses entspricht einer Näherung wie sie von Love /3.7/ benutzt wird, der die Variation der Schubverformungen über die Elementdicke vernachlässigt. Bild 3.1b stellt das degenerierte Schalenelement nach Razzaque /3.5/ dar. Dieses Element ist anwendbar sowohl für dünne als auch für dicke Platten- und Schalentragwerke. Eine genügend genaue Abbildung geometrisch nichtkontinuierlicher Schalenstrukturen ist jedoch nicht möglich. Irons /3.8/ verknüpft die Erfahrungen von Loof /3.9/ bei der Verbindung der Elemente an den Gaußpunkten entlang der Elementberandung mit den Ergebnissen von Razzaque /3.5/ zu dem Semi-Loof Schalenelement (Bild 3.1c). Dieses Element ist in der Lage, Diskontinuitäten der Schalengeometrie und des Dickenverlaufes zu berücksichtigen.

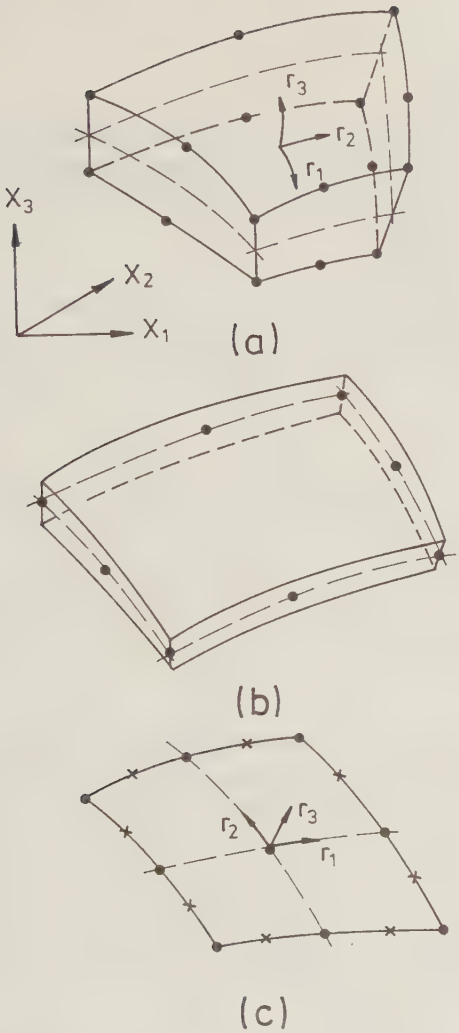


Bild 3.1

a) dreidimensionales Schalenelement

b) degeneriertes parabolisches Schalenelement

c) Semi-Loof Schalenelement

Martins und Owen /3.10/, /3.11/ sowie Javaherian u.a. /3.12/ erweitern das Semi-Loof Element zur numerischen Abbildung geometrisch nichtlinearer und elastisch-plastischer Probleme.

Nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen des Semi-Loof Elements wird in den folgenden Kapiteln die Anwendbarkeit auf Stahlbetonflächentragwerke ausgedehnt.

3.2 Geometrisch und physikalisch nichtlineare Grundlagen

Zur Beschreibung der Verformungsvorgänge eines belasteten Körpers wird auf die zahlreiche Grundlagenliteratur verwiesen, z.B. /3.13/, /3.14/, /3.15/, /3.16/, /3.17/ u.a..

Aufbauend auf Green, Zerna /3.13/ betrachten Bathe und Ozdemir in /3.18/ die Verformungsvorgänge eines Körpers als eine Funktion der Zeit (Bild 3.2). Um die unbekannten Variablen des Körpers zur Zeit $t = t + \Delta t$ zu ermitteln, wird eine totale Lagrange-Formulierung der virtuellen Arbeiten zur Lösung herangezogen. Die Vor- und Nachteile der totalen Lagrange-Formulierung sind z.B. in /3.19/ hinreichend erörtert.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit führt zu einer Bewegungsgleichung, die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen des Körpers zur Zeit $t = t + \Delta t$ beschreibt:

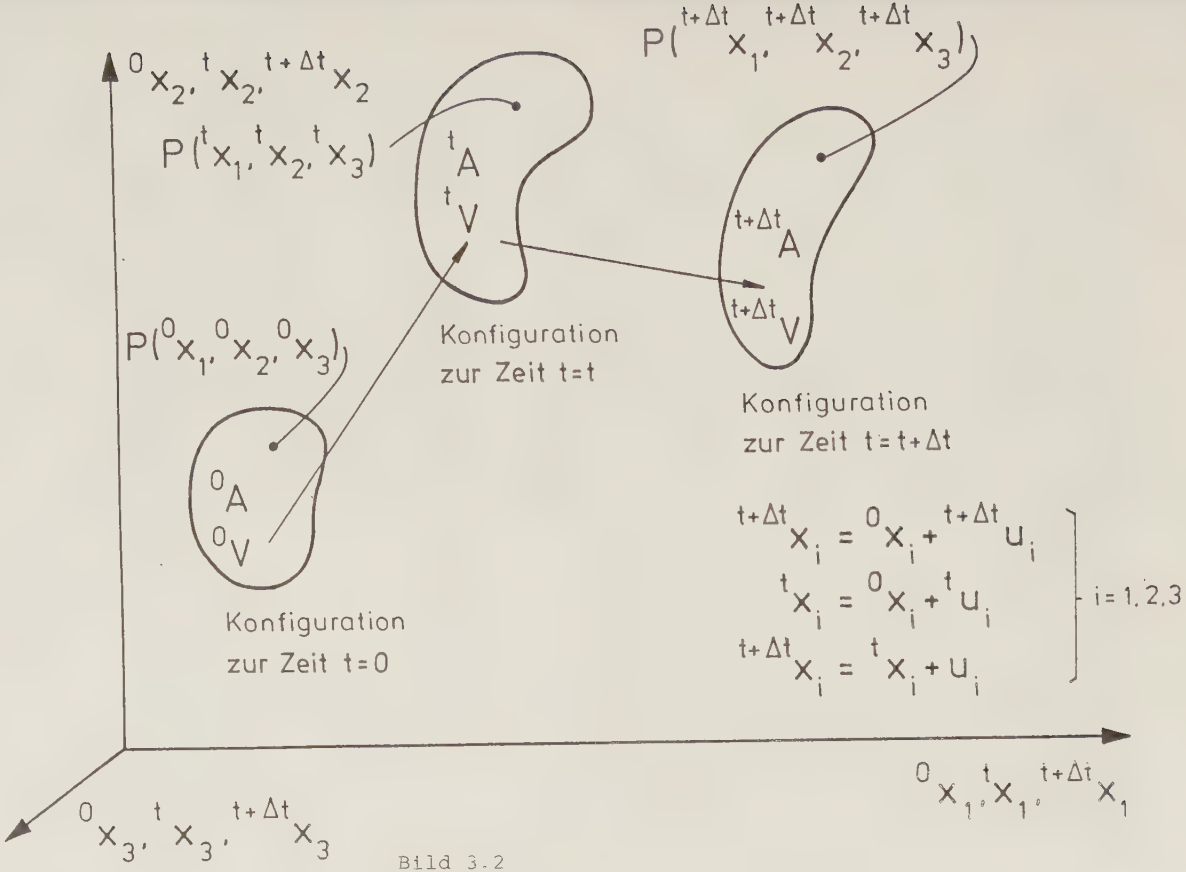


Bild 3.2
Strukturverformungen unter Belastung im kartesischen Koordinatensystem

$$\int_{{}^{o}V} {}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij}\, \delta\, {}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij}\, {}^{0}dV = {}^{t+\Delta t}\pi \tag{3.1}$$

mit

$${}^{t+\Delta t}\pi = \int_{{}^{o}A} {}^{t+\Delta t}_{0}t_k\, \delta u_k\, {}^{0}dA + \int_{{}^{o}V} {}^{0}\varrho\, {}^{t+\Delta t}_{0}f_k\, \delta u_k\, {}^{0}dV.$$

Hierin sind

${}^{o}\ldots,\ {}^{t+\Delta t}\ldots$	: oberer Index zur Kennzeichnung der Konfiguration zur Zeit $t = o$ bzw. $t = t + \Delta t$,
V, A	: Volumen bzw. Fläche der Konfiguration,
${}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij}$	: Komponenten 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor bzw. des Green-Lagrange-Verzerrungtensors bezogen auf die Konfiguration zur Zeit $t = o$,
π	: äußere virtuelle Arbeit durch Oberflächen- und Volumenkräfte,
${}^{t+\Delta t}_{0}t_k$, ${}^{t+\Delta t}_{0}f_k$	: Oberflächen- bzw. Volumenkräfte,
u_k	: Verformung der Konfiguration,
$\delta\ldots$	: Zeichen für Variation in ...,
ϱ	: Spezifisches Gewicht des Körpers.

Gleichung (3.1) bildet eine nichtlineare Gleichung bezogen auf die unbekannten statischen und kinematischen Variablen zur Zeit $t = t + \Delta t$, und kann durch eine Taylorreihenentwicklung der Residuallasten ${}^{t+\Delta t}\varphi$ über den Varablen angenähert werden

$$ {}^{t+\Delta t}\varphi = \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij}\, \delta\, {}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij}\, {}^{0}dV - {}^{t+\Delta t}\pi = 0 . $$

Die Terme zweiter und höherer Ordnung werden als vernachlässigbar betrachtet, so daß eine lineare Approximation die Residuallasten mit den Verformungsinkrementen verknüpft (vgl. /3.12/, /3.18/). Nach Bathe und anderen Autoren (/3.18/, /3.19/, /3.20/, /3.21/) läßt sich Gleichung (3.1) für inkrementelle Verformungen wie folgt vereinfachen:

$$ \int_{{}^0V} {}^{0}C_{ijrs}\, {}^{0}e_{rs}\, \delta\, {}^{0}e_{ij}\, {}^{0}dV + \int_{{}^0V} {}^{t}_{0}S_{ij}\, \delta\, {}^{0}\eta_{ij}\, {}^{0}dV = {}^{t+\Delta t}\pi - \int_{{}^0V} {}^{t}_{0}S_{ij}\, \delta\, {}^{0}e_{ij}\, {}^{0}dV \qquad (3.2). $$

Hierin sind

C_{ijrs}	: Tensor der konstitutiven Komponenten,
e_{ij}, η_{ij}	: lineare bzw. nichtlineare Tensorkomponenten der inkrementellen Verzerrungen.

Eine physikalische Deutung der in Gleichung (3.2) verwendeten Spannungs- und Verzerrungstensoren wird z.B. von Papenhausen in /3.22/ sowie Kristjansson in /3.23/ beschrieben.

In der dieser Arbeit zugrunde liegenden Formulierung kleiner Verzerrungen (klein gegen eins) lassen sich gemäß den genannten Autoren die Kirchhoff´schen Spannungen den Ingenieurspannungen gleichsetzen. Zur Definition des Begriffes " Ingenieurspannungen" vgl./3.23/.

3.3 Diskretisierung für ein finites Element

Für ein diskretes finites Element läßt sich Gleichung (3.2) wie folgt in Matrizenschreibweise darstellen (vgl. /3.18/), auf die Indizierung der Konfiguration kann im folgenden verzichtet werden :

$$\underline{K} \cdot \Delta \underline{U} = \underline{F} - \underline{R} \qquad (3.3),$$

mit

$$\underline{K} = \underline{K}_L + \underline{K}_{NL} \qquad (3.4).$$

Hierin bedeuten

$\underline{K}$: inkrementelle Matrix der tangentialen Steifigkeiten,

$\underline{K}_L, \underline{K}_{NL}$: lineare bzw. nichtlineare Anteile

der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$,

$\Delta\underline{U}$: Vektor der inkrementellen Verformungen,

$\underline{R}$: Vektor der residualen Knotenlasten,

$\underline{F}$: Vektor zur Berücksichtigung äußerer Einzel-, Flächen- und Volumenlasten.

Im Einzelnen beinhalten die Terme der Gleichungen (3.3) und (3.4) :

$$\underline{K}_L = \int_V \underline{B}_L^T \, \underline{C} \, \underline{B}_L \, dV \qquad (3.5),$$

$$K_{NL} = \int_V \underline{B}_{NL}^T \underline{S} \, \underline{B}_{NL} \, dV \qquad (3.6),$$

$$\underline{R} = \int_V \underline{B}_L^T \, \hat{\underline{S}} \, dV \qquad (3.7),$$

mit

$\underline{B}_L, \underline{B}_{NL}$: lineare bzw. nichtlineare Tranformationsmatrix der Verzerrungs-Verformungs-Ansatzfunktionen,

$\underline{C}$: Matrix der inkrementell tangentialen Materialeigenschaften,

$\underline{S}, \hat{\underline{S}}$: Matrix bzw. Vektor der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen.

Zur Lösung der Gleichung (3.3) wird im folgenden das isoparametrische Semi-Loof Element verwendet.

3.4 Lineares Semi-Loof Element

Das Konzept der isoparametrischen finiten Elemente wird in /3.24/, /3.25/, /3.26/ u.a. sowie anhand des Semi-Loof Elementes in /3.8/, /3.10/, /3.11/, /3.12/ und /3.28/ eingehend behandelt, so daß an dieser Stelle nur ein kurzer Überblick über das benutzte Element gegeben wird.

Innerhalb des isoparametrischen Konzeptes werden die Geometrie und Verformungen eines belasteten Körpers durch Formfunktionen angenähert, die innerhalb eines gekrümmten, lokalen Koordinatensystems r_i (i =1,2,3) (vgl. Bild 3.3a, b) in den Grenzen -1 bis +1 definiert sind. Zur Beschreibung von Zustandsgrößen in lokalen, orthogonalen Koordinaten $\hat{X}_i$ (i = 1,2,3) kann das Koordinatentripel

$$\hat{X} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial r_1}$$

$$\hat{Z} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial r_1} \times \frac{\partial \vec{P}}{\partial r_2}$$

$$\hat{Y} = \hat{X} \times \hat{Z}$$

an jedem ausgezeichneten Punkt des Elementes mit Hilfe des Ortsvektors $\vec{P}$ errichtet werden. Durch Normierung der Vektoren $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ lassen sich die Einheitsvektoren $\hat{X}_i$ (i = 1,2,3) bilden (vgl. Bild 3.3a).

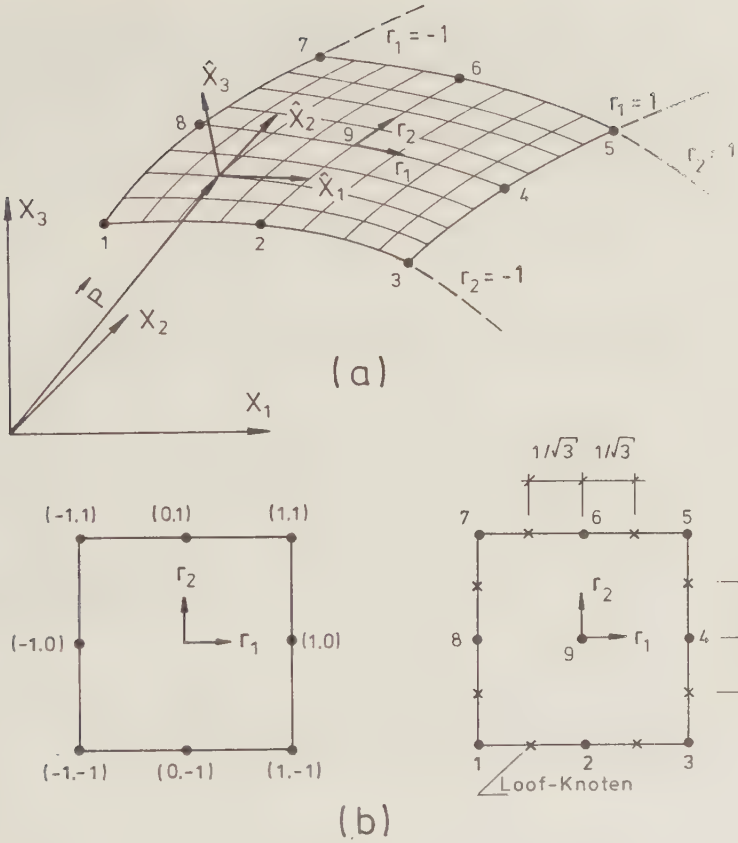


Bild 3.3

a) Semi-Loof-Element im globalen Koordinatensystem und normierte Koordinatentripel

b) Semi-Loof Element im lokalen Koordinatensystem mit Loof-Knoten

Zur Bildung der Formfunktionen werden Ansätze quadratischer Ordnung in lokalen, gekrümmten Koordinaten definiert. Zur Beschreibung der Elementgeometrie und der Verformungen der Eck-, Seitenmittenknoten und des Zentralknotens (Bild 3.4) wird der Ansatz

$$\underline{\Phi}_N = [\,1 \mid r_1 \mid r_2 \mid r_1^2 \mid r_1 r_2 \mid r_2^2 \mid r_1^2 r_2 \mid r_1 r_2^2 \mid r_1^2 r_2^2\,]$$

benutzt, die Rotationen der Loofknoten werden durch

$$\underline{\Phi}_L = [\,1 \mid r_1 \mid r_2 \mid r_1^2 \mid r_1 r_2 \mid r_2^2 \mid r_1^2 r_2 \mid r_1 r_2^2 \mid r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2)\,]$$

beschrieben. Damit ermitteln sich die Formfunktionen für die

- Eckknoten (Knotennummer j = 1,3,5,7):

$$N^j(r_1, r_2) = \frac{1}{4}(1 + r_{10})(1 + r_{20})(r_{10} + r_{20} - 1) \qquad (3.8),$$

- Seitenmittenknoten (Knotennummer j = 2,4,6,8):

$$N^j(r_1, r_2) = \frac{1}{2}(1 - r_1^2)(1 + r_{20}) \quad \text{falls} \quad r_1^j = 0 \,,$$
$$N^j(r_1, r_2) = \frac{1}{2}(1 - r_2^2)(1 + r_{10}) \quad \text{falls} \quad r_2^j = 0 \qquad (3.9),$$

- Zentralknoten (Knotennummer j = 9):

$$N^j(r_1, r_2) = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2) \qquad (3.10),$$

mit

$$r_{10} = r_1^j \cdot r_1 \,,$$
$$r_{20} = r_2^j \cdot r_2$$

und r_1^j, r_2^j als aktuellen Wert des betrachteten Knotenpunktes. Die Formfunktion $N^9(r_1, r_2)$ des Zentralknotens ist als Blasenfunktion bekannt. Die Formfunktionen der Rotationen an den Loof-Knoten lassen sich ermitteln zu:

$$L^j(r_1, r_2) = \frac{3}{32}(3 \cdot r_1^2 - r_2^2) + \frac{1}{8}\{3 \cdot r_{10}(1 - r_2^2) + 3\, r_{20}[3 r_1^2 + r_{10} - 1 + \frac{3}{2} r_{10}(r_1^2 - r_2^2)]\} \quad \text{für } r_1^j = \pm 1$$

und

$$L^j(r_1, r_2) = \frac{3}{32}(3 r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{8}\{3 r_{20}(1 - r_1^2) + 3\, r_{10}[3 r_2^2 + r_{20} - 1 + \frac{3}{2} r_{20}(r_2^2 - r_1^2)]\} \quad \text{für } r_2^j = \pm 1$$

(3.11).

Das Semi-Loof Element besitzt an den Eck- und Seitenmittenknoten drei Verschiebungen u,v,w als Knotenvariable sowie zwei Rotationen Θ_{13}, Θ_{23} an den Loof-Knoten. Am Zentralknoten sind die Variablen u,v,w, Θ_{13}, Θ_{23} definiert. Bild 3.4 veranschaulicht die Lage und Vorzeichenkonvention der lokalen Verformungsgrößen (vgl. auch Bild 3.5).

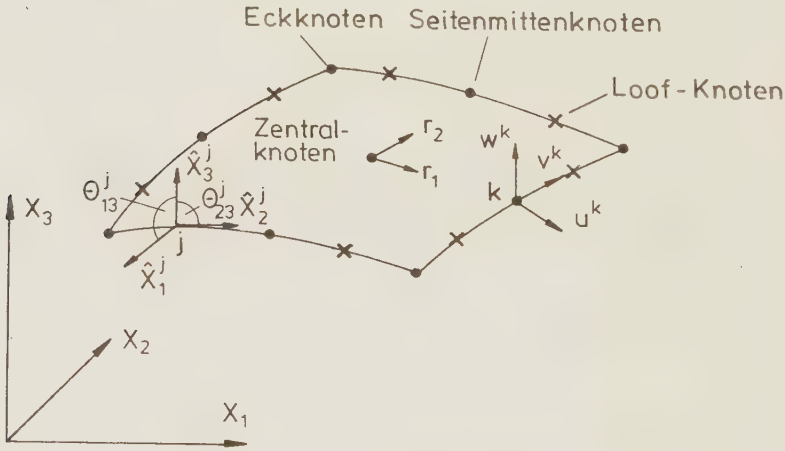


Bild 3.4
Knotenkonfiguration des Semi-Loof Elements

Durch problembezogene Annahmen, die in /3.8/ beschrieben sind, läßt sich die Anzahl der Knotenfreiheitsgrade von 45 auf 32 je Element senken, den Verschiebungen u, v, w an den Eck- und Seitenmittenknoten sowie der Rotaion Θ_{13} an den Loof-Knoten. Bild 3.5

gibt einen Überblick über die Lage und Anzahl der Knotenvariablen vor und nach der Reduktion sowie über die lokalen, orthogonalen Koordinaten an den Loof-Knoten.

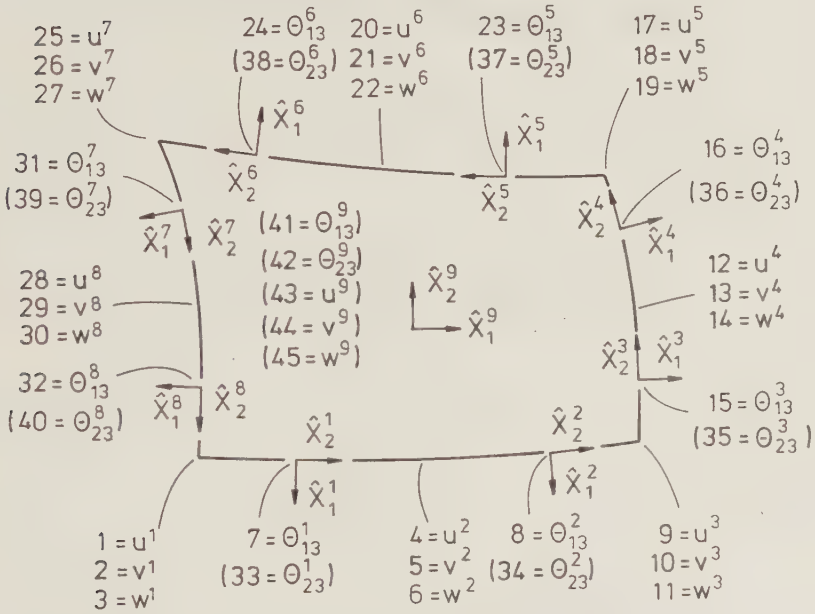


Bild 3.5
Knotenvariable des Semi-Loof Elementes vor und nach der Reduktion (Klammerwerte)

Aus rechentechnischen Gründen werden die Rotationen zweier Loof-Knoten einem Seitenmittenknoten zuge-

schrieben; für die drei beteiligten Knoten gilt

$$r_1 = \text{konst}$$

oder $$r_2 = \text{konst.}$$

Der Vektor der Knotenvariablen eines Eckknotens j ergibt sich damit zu

$$\underline{\delta}^j = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^j \tag{3.12}$$

bzw. eines Seitenmittenknotens j

$$\underline{\delta}^j = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta_{13}^- \\ \Theta_{13}^+ \end{bmatrix}^j \tag{3.13}$$

Hierin bedeuten

$\Theta_{13}^-, \Theta_{23}^+$: zum Seitenmittenknoten transformierte Rotationen, deren zugeordneter Loof-Knoten in Richtung kleiner bzw. größer werdender Knotennumerierung liegt.

Das weitere Vorgehen zur Bestimmung der Geometrie und der lokalen oder globalen Verformungen kann der angegebenen Grundlagenliteratur entnommen werden.

Die Verzerrungskomponenten bezüglich der globalen Koordinaten lassen sich durch

$$\frac{\partial \underline{\delta}^j}{\partial X_i} = \frac{\partial \underline{\delta}^j}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial X_i} \qquad (3.14),$$

mit

$i = 1, ..,3$

$j = 1, ..,n$

und n = Anzahl der Knotenpunkte $(n=8)$,

als partielle Ableitungen bezüglich der natürlichen Koordinaten r_k $(k = 1,2)$ darstellen.

Mit Hilfe der Jakobimatrix

$$\underline{J} = \left[\frac{\partial X_i}{\partial r_k} \right] \qquad (3.15)$$

lassen sich die Transformationskoeffizienten der Gleichung (3.14) als Elemente der inversen Matrix $\underline{J}^{-1}$ bestimmen.

3.5 Geschichtetes Semi-Loof Element

Aus den bekannten Elementbeziehungen des vorgestellten Semi-Loof Elementes wird im folgenden Abschnitt durch

Diskretisierung der Spannungsverteilung über die Elementdicke ein Schichtenelement formuliert.

Cervenka /3.29/ und Franklin /3.30/ benutzen dieses Verfahren zur Berechnung von Stahlbetonscheiben. Weitere Veröffentlichungen /3.31/, /3.32/, /3.33/ zeigen die Vorteile des Schichtenmodells gegenüber den häufig verwendeten Momenten-Krümmungs-Beziehungen, die auch den Arbeiten von Koch /2.22/ und Svensvik /2.26/ zugrunde liegen, zur Erfassung physikalisch nichtlinearer Einflüsse auf das Tragverhalten von Stahlbetonsystemen. Zerna, Mungan und Steffen sowie Schmidt berücksichtigen in /3.34/ bzw. /3.35/ den Schichtencharakter des Verbundwerkstoffs Stahlbeton zur Berechnung von Stahlbetonschalentragwerken.

Es gelten folgende Voraussetzungen und Annahmen:

a) jeder Schicht können unterschiedliche Materialkennwerte zugeordnet werden, die zum Spannungs-Verzerrungs-Zustand der Schicht korrespondieren;
b) jeder Schicht kann ein einachsialer oder zweiachsialer Spannungszustand zugeordnet werden;
c) der Verzerrungszustand einer Schicht kann durch den Verzerrungsstand einer beliebigen Referenzschicht beschrieben werden;
d) die Spannungsverteilung über die Schichtdicke kann konstant angenommen werden;
e) die Querschnitte bleiben eben.

Das Schichtenmodell des Semi-Loof Elementes ist in Bild 3.6 mit der Schalenmittelfläche als Referenzschicht dargestellt.

Mit den kinematischen Beziehungen des ebenen Spannungszustandes der Mittelfläche eines Stahlbetontragwerks als Referenzschicht (Index "^{o}") und den lokalen, kartesischen Koordinaten aus Bild 3.4

$$\underline{\varepsilon}^{o} = \{ \varepsilon^{o}_{\hat{x}_1\hat{x}_1} \; \varepsilon^{o}_{\hat{x}_2\hat{x}_2} \; \varepsilon^{o}_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \}$$

$$\underline{\varepsilon}^{o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\right)^2 & \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\right)^2 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} & \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

sowie den Krümmungen

$$\underline{\varkappa}^{o} = \begin{bmatrix} \varkappa^{o}_{\hat{x}_1\hat{x}_1} \\ \varkappa^{o}_{\hat{x}_2\hat{x}_2} \\ \varkappa^{o}_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_3} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_2 \partial \hat{x}_2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_2 \partial \hat{x}_3} & -\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

lassen sich die Verzerrungen einer beliebigen Schicht im Abstand $\hat{x}_3$ in Richtung der lokalen Normalenachse $\hat{x}_3$ ermitteln

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\hat{x}_1\hat{x}_1} \\ \varepsilon_{\hat{x}_2\hat{x}_2} \\ \varepsilon_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\hat{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\hat{x}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\hat{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{o}{\varepsilon}_{\hat{x}_1\hat{x}_1} \\ \overset{o}{\varepsilon}_{\hat{x}_2\hat{x}_2} \\ \overset{o}{\varepsilon}_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \\ \overset{o}{\varkappa}_{\hat{x}_1\hat{x}_1} \\ \overset{o}{\varkappa}_{\hat{x}_2\hat{x}_2} \\ \overset{o}{\varkappa}_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \end{bmatrix} \qquad (3.18),$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{G} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^o \\ \underline{\varkappa}^o \end{bmatrix} \qquad (3.19).$$

Gleichung (3.19) in Gleichung (3.5) eingesetzt führt zu einer Entkopplung des Volumenintegrals

$$\underline{K}_L = \int_A \underline{B}_L^T \left(\int_{\hat{x}_3} \underline{L} \, d\hat{x}_3 \right) \underline{B}_L \, dA \qquad (3.20),$$

mit

$$\underline{L} = \underline{G}^T \underline{C} \, \underline{G} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{E} & -\hat{x}_3 \underline{E} \\ \hline -\hat{x}_3 \underline{E} & \hat{x}_3^2 \underline{E} \end{array} \right] \qquad (3.21).$$

Die Operatorenmatrix der Formfunktionen $\underline{B}_L$ der Gleichung (3.20) beinhaltet sowohl die linearen Verzerrungs- und Krümmunsanteile als auch die quadratischen Verzerrungsanteile. Die Matrix $\underline{E}$ der Gleichung (3.21) ist eine 3x3-Matrix und beinhaltet die in Kap. 2 vorgestellten Materialeigenschaften.

Da die Materialeigenschaften einer Schicht in Richtung der lokalen Normalenachse $\hat{x}_3$ isotrop angenommen werden, ergibt sich die konstitutive Beziehung für das Schichtenelement als Summation über die Anzahl der Schichten (vgl. Bild 3.6)

$$\int_{\hat{x}_3} \underline{L}\, d\hat{x}_3 = \int_{t_1}^{t_2} \underline{L}^1 d\hat{x}_3 + \int_{t_2}^{t_3} \underline{L}^2 d\hat{x}_3 + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{L}^n d\hat{x}_3 \qquad (3.22)$$

bzw.

$$\int_{\hat{x}_3} \underline{L}\, d\hat{x}_3 = \left[\begin{array}{c|c} \sum_{j=1}^{n} (t_{j+1}-t_j)\,\underline{E}^j & \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}(t_{j+1}^2-t_j^2)\,\underline{E}^j \\ \hline \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}(t_{j+1}^2-t_j^2)\,\underline{E}^j & \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3}(t_{j+1}^3-t_j^3)\,\underline{E}^j \end{array}\right] \qquad (3.23).$$

Gleichung (3.20) läßt sich mit den Gleichungen (3.22) und (3.23) umformen zu

$$\underline{K}_L = \int_A \underline{B}_L^T \left(\sum_{j=1}^{n} \underline{L}^j \right) \underline{B}_L\, dA \qquad (3.24).$$

Hierin gibt der Zähler n die Anzahl der Schichten an und t_j, t_{j+1} die Abstände der Grenzflächen der j-ten Schicht. Für Schichtungen, die zur Mittelfläche symmetrisch sind, entfallen die Terme der Nebendiagonalen in Gleichung (3.23). Dieses entspricht einer physikalischen Entkoppelung zwischen Membran- und Biegegrößen. Bild 3.6 gibt einen Überblick über das geschichtete Element eines Stahlbetonschalentragwerks. Als Referenzfläche ist die Schalenmittelfläche eingezeichnet.

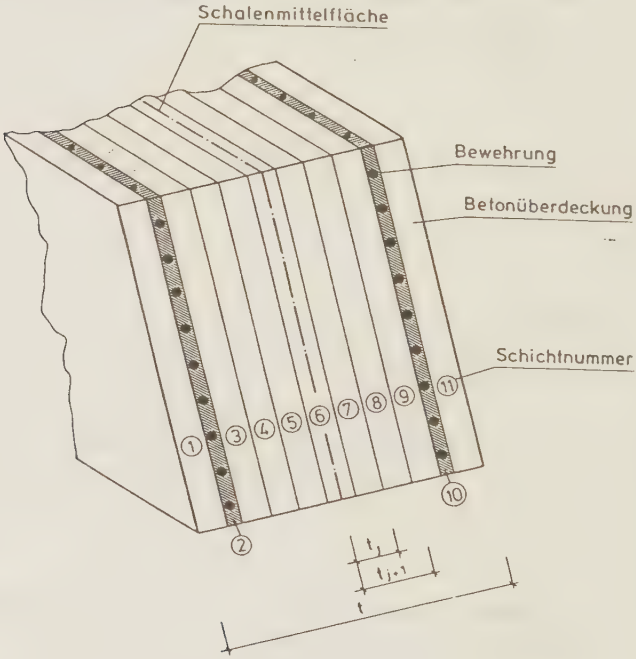


Bild 3.6
Geschichtetes Stahlbetonschalenelement

3.6 Geschichtete geometrische Steifigkeitsmatrix

Die geometrische Steifigkeitsmatrix läßt sich mit der angegebenen Literatur für den Fall richtungsstreuer Kräfte mit Gleichung (3.6) analog zu Gleichung (3.24) herleiten:

$$\underline{K}_{NL} = \int_A \underline{B}_{NL}^T \left(\int_{\hat{x}_3} \underline{S} \, d\hat{x}_3 \right) \underline{B}_{NL} dA \qquad (3.25).$$

Hierin gibt

$$\underline{B}_{NL} = d\,(\underline{B}_L)$$

den Verschiebungszuwachs infolge der quadratischen Verzerrungsanteile (vgl. Gleichung 3.16) an.

Mit den in Kapitel 3.5 getroffenen Annahmen ermitteln sich die Spannungen einer Schicht j aus den Dehnungen (vgl. Bild 3.7)

$$\underline{\varepsilon}^j = \underline{\varepsilon}^o - \frac{1}{2}(t_{j+1} + t_j)\,\underline{\varkappa}^o \qquad (3.26)$$

zu

$$\underline{\sigma}^j = \underline{E}^j(\underline{\varepsilon}^j - \varepsilon_o^j) + \underline{\sigma}_o^j \tag{3.27}$$

mit dem zu $\underline{\varepsilon}^j$ korrespondierenden Spannungsvektor

$$\underline{\sigma}^j = \{\sigma_{\hat{x}_1\hat{x}_1}\sigma_{\hat{x}_2\hat{x}_2}\sigma_{\hat{x}_1\hat{x}_2}\} \tag{3.28}$$

und

$\varepsilon_o^j, \sigma_o^j$: Vektor der Anfangsdehnungen bzw. -spannungen der Schicht j.

Mit der Spannungsmatrix einer Schicht j

$$\underline{S}^j = \left[\begin{array}{c|c} \sigma^j_{\hat{x}_1\hat{x}_1}\underline{I}_3 & \sigma^j_{\hat{x}_1\hat{x}_2}\underline{I}_3 \\ \hline \sigma^j_{\hat{x}_1\hat{x}_2}\underline{I}_3 & \sigma^j_{\hat{x}_2\hat{x}_2}\underline{I}_3 \end{array}\right] \tag{3.29}$$

und der Einheitsmatrix

$$\underline{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

läßt sich das Integral der Gleichung (3.25) in Richtung des Normalenvektors $\hat{x}_3$ als Summation über die Anzahl der Schichten n lösen

$$\int_{\hat{x}_3} \underline{S}\, d\hat{x}_3 = \int_{t_1}^{t_2} \underline{S}^1 d\hat{x}_3 + \int_{t_2}^{t_3} \underline{S}^2 d\hat{x}_3 + \ldots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{S}^n d\hat{x}_3 \qquad (3.30).$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underline{S}^j (t_{j+1} - t_j)$$

Mit der Gleichung (3.30) läßt sich Gleichung (3.25) wie folgt schreiben:

$$\underline{K}_{NL} = \int_A \underline{B}_{NL}^T [\sum_{j=1}^{n} \underline{S}^j (t_{j+1} - t_j)]\, \underline{B}_{NL} dA \qquad (3.31).$$

3.7 Residuale Knotenlasten

Die residualen Knotenlasten der Gleichung (3.7) lassen sich mit den Gleichungen (3.27) und (3.28) analog zur Herleitung der Gleichung (3.24) für ein geschichtetes Element notieren.

Mit

$$\hat{\underline{S}}^j = \begin{bmatrix} \underline{\sigma}^j (t_{j+1} - t_j) \\ -\underline{\sigma}^j (t_{j+1}^2 - t_j^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{n}^j \\ \underline{m}^j \end{bmatrix} \qquad (3.32)$$

wird Gleichung (3.7) zu

$$\underline{R} = \int_A \underline{B}_L^T \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{\underline{S}}^j \right) dA \qquad (3.33).$$

Hierin sind:

$\underline{n}^j, \underline{m}^j$: Membran-, bzw. Biegegrößen der Schicht j.

3.8 Lösungsalgorithmus am Finiten Element

Die diskretisierte Bewegungsgleichung (3.3) läßt sich mit den Gleichungen (3.24), (3.31) und (3.33) zusammenfassend für ein finites Element schreiben

$$\int_A \left\{ \underline{B}_L^T \left(\sum_{j=1}^{n} \underline{L}^j \right) \underline{B}_L + \underline{B}_{NL}^T \left[\sum_{j=1}^{n} \underline{S}^j (t_{j+1} - t_j) \right] \underline{B}_{NL} \right\} dA \cdot \Delta U$$
$$= \underline{F} - \int_A \underline{B}_L^T \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{\underline{S}}^j \right) dA \qquad (3.34)$$

Die Operatorenmatrizen $\underline{B}_L$ und $\underline{B}_{NL}$ sind Funktionen der natürlichen Koordinaten r_i (i = 1,2). Das Flächeninkrement dA läßt sich mit Hilfe der Jakobimatrix $\underline{J}$ in natürlichen Koordinaten bestimmen

$$dA = \det \underline{J} \, dr_1 \, dr_2 \qquad (3.35).$$

Hierin ist det $\underline{J}$ die Determinante der Jakobimatrix (vgl. Gleichung (3.15)).

Die diskreten Elementeigenschaften des Semi-Loof Elementes werden durch eine 2x2-Gauß-Integration bestimmt. Die Bedeutung dieses Integrationsgrades und der Einfluß auf die Lösung wird in /3.5/, /3.6/, /3.8/ u.a. aufgezeigt.

Mit Gleichung (3.35) wird Gleichung (3.34) für diskrete Stützstellen der Gauß-Integration zu

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} H^{k}_{r_1} H^{l}_{r_2} \{ \underline{B}_L^T (\sum_{j=1}^{n} \underline{L}^j) \underline{B}_L \\ + \underline{B}_{NL}^T [\sum_{j=1}^{n} \underline{S}^j (t_{j+1} - t_j)] \underline{B}_{NL} \} \det \underline{J} \\ = \underline{F} - \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} H^{k}_{r_1} H^{l}_{r_2} [\underline{B}_L^T (\sum_{j=1}^{n} \hat{\underline{S}}^j)] \det \underline{J}\end{aligned} \qquad (3.36).$$

Hierin bedeuten

$H^{l}_{r_1}, H^{k}_{r_2}$: Wichtungskoeffizienten der Gauß-Integrationsregel

Für eine 2x2-Gauß-Integration liegen die Stützstellen bei (vgl. Bild 3.7)

$$r_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (i = 1,2)$$

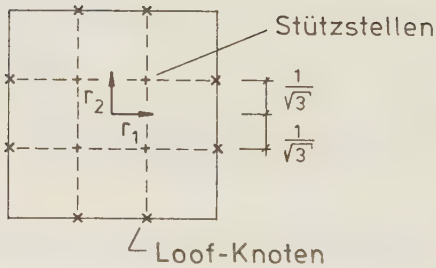


Bild 3.7
Lage der Gauß-Integrationsstützstellen für eine 2x2-Integrationsregel

3.9 Ausdruck der Ergebnisse

Mit Verfeinerung des Elementnetzes konvergieren die Verformungen schneller als die Spannungen. Barlow zeigt in /3.36/, daß - abhängig von der Wahl der Ansatzfunktionen - die Ermittlung der Spannungen an den Gauß-Stützstellen (vgl. Bild 3.7) zu einer größeren Genauigkeit führt.

4. Nichtlinearer Lösungsalgorithmus

4.1 Allgemeines

Die Berücksichtung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten sowie Materialversagen führt zu Last-Verschiebungs-Beziehungen wie sie Bild 4.1 qualitativ darstellt.

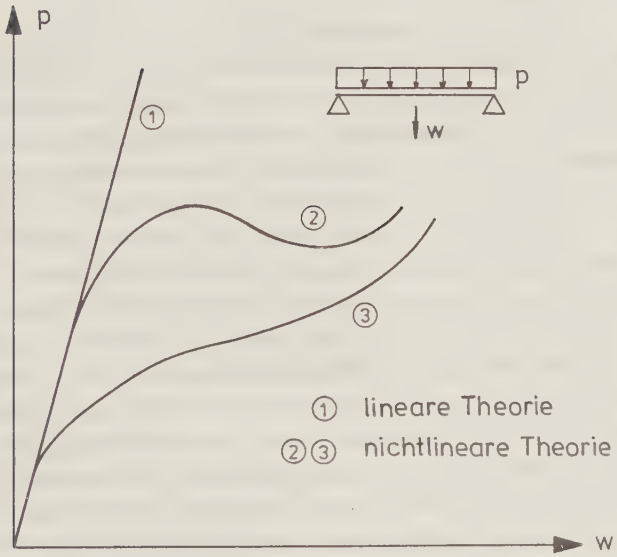


Bild 4.1
Last-Verschiebungs-Diagramm einer Stahlbetonplatte (qualitative Darstellung)

Es ist ersichtlich, daß die physikalischen Nichtlinearitäten schon bei kleinen Verformungen zu Abweichungen von der linearen Theorie führen, während die geometrisch nichtlinearen Einflüsse erst bei großen Durchbiegungen wesentlich auf das Verformungsverhalten einwirken. Die Darstellungen (2) und (3) des Bildes 4.1 zeigen den unterschiedlichen Einfluß der zwei Problemgruppen, zu denen geometrische Nichtlinearitäten führen können:

- Spannungsprobleme (3) bzw.
- Stabilitätsprobleme (2) .

Eine Einführung und Literaturangaben gibt Kristjansson in /4.1/. Grundlagenliteratur und weiterführende Arbeiten zu den geometrisch nichtlinearen Problemen insbesondere bei Schalentragwerken bilden die Arbeiten von Zerna /4.2/, Krätzig /4.3/, Köpper /4.4/, Fritz, Wittek /4.5/ u.a.. Die Versuche von Swartz, Sosebraugh, Berman /4.6/ weisen auf, daß Stahlbetonplatten nur eine geringe Tragreserve über die Durchschlaglast hinaus besitzen (vgl. Darstellung (2) in Bild 4.1). Gezielte Versuche an Stahlbetonschalen fehlen zur Zeit völlig. Im folgenden wird deshalb konservativ angenommen, daß bei Erreichen eines Durchschlagpunktes der Last-Verformungs-Beziehung die Grenztragfähigkeit des Stahlbetontragwerks erreicht ist. Mit dieser Begrenzung der Verformungen erscheint die in Kapitel 3 benutzte Formulierung der Spannungs- und Verformungstensoren nachträglich gerechtfertigt. Die Durchschlags- oder Verzweigungslast eines Systems wird in der angegebenen Literatur zumeist durch eine lineare Eigenwertanalyse bestimmt. Bei Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten und Materialversagen sind die

Steifigkeitsmatrixen der Gleichung (3.34) jedoch lediglich inkrementell linearisierbar. Die kritische Last kann durch eine Beziehung gefunden werden, welche die Systemdeterminante mit dem Belastungszustand verknüpft. Bei Erreichen der kritischen Last ergibt sich die Determinante zu Null. Kristjansson /4.1/ gibt hierzu nähere Erläuterungen sowie weitergehende Literaturnachweise.

4.2 Lösungsverfahren

Zur Lösung der nichtlinearen Gleichung (3.36) stehen drei Lösungsgruppen zur Verfügung:

1. inkrementelle Verfahren,
2. iterative Verfahren und
3. gemischte Verfahren.

Eine ausführliche Diskussion der angegebenen Gruppen sowie einzelner Lösungsverfahren innerhalb einer Gruppe kann z.B. /4.7/ bis /4.11/ entnommen werden. Infolge der Wegabhängigkeit der Lösung von physikalisch nichtlinearen Problemen, die Rißbildung beinhalten, existieren keine eindeutigen Last- Verschiebungs-Beziehungen. Es ist deswegen nötig, die Belastung inkrementell zu erfassen. Bei niedrigem Spannungsniveau ist das Verhalten der Stahlbetontragwerke nahezu linear (vgl. Kapitel 2.2). Es existiert eine eindeutige Beziehung zwischen der Belastung und der zugehörigen Verformung. Erst nach Erreichen einer definierten Erstrißspannung (vgl. Kapitel 2.7.2) geht die Eindeutigkeit verloren. Innerhalb dieser Arbeit nimmt die Größe der Belastungsinkremente in Abhängigkeit vom Spannungsniveau mit zunehmender Rißbildung ab.

4.3 Gleichgewichtsiteration infolge Rißbildung und Nichtlinearitäten

Die Iteration innerhalb eines Lastinkrementes stellt sicher, daß Spannungen, die innerhalb einer Elementschicht nicht mehr übertragen werden können, auf benachbarte Schichten oder Elemente umgelagert werden. Um die tatsächlich vorhandenen Spannungen zu ermitteln, werden sogenannte Anfangsspannungen den fiktiven Spannungen überlagert

$$\sigma^j = \sigma_f^j - \sigma_o^j \qquad (4.1),$$

mit

σ^j : tatsächlich vorhandene Spannung der Schicht j,
σ_f^j : fiktive Spannung der Schicht j,
σ_o^j : Anfangsspannung der Schicht j.

Die Anfangsspannungen können über zusätzliche Knotenkräfte des Lastvektors berücksichtigt werden bzw. durch Veränderung der Materialkenngrößen der Schicht j:

$$\sigma^j = E^j \, \varepsilon^j \qquad (4.2),$$

mit

$$E^j = E_f^j - E_o^j$$

und

E^j : tatsächlich vorhandene Materialkenngröße der Schicht j,

E_f^j : fiktive Materialkenngröße der Schicht j,

E_o^j : Differenz der Materialkenngrößen der Schicht j,

ε^j : tatsächlich vorhanden Verzerrungskomponente der Schicht j.

Innerhalb dieser Arbeit müssen folgende Einflüsse iterativ berücksichtigt werden:

a) nichtlineares Materialverhalten,
b) Materialversagen im Druck-/Druck-, Druck-/Zug bzw. Zug-/Zugbereich,
c) nichtlineares Verbundverhalten zwischen Bewehrungsstab und Beton.

Das verwendete Verfahren ist der Lösungsgruppe 3 (gemischte Verfahren) zuzuordnen. Die gebräuchlichsten iterativen Methoden sind das Verfahren der Anfangssteifigkeiten, das mit unveränderten Systemsteifigkeiten das Gleichgewicht über Gleichung (4.1) erzielt sowie das Newton-Raphson-Verfahren, das sich der Gleichung (4.2) bedient. Neben diesen Methoden sind beliebige Kombinationen möglich. Das erstellte EDV-Programm ermöglicht die Benutzung der angeführten Verfahren und beliebige Kombinationen. Da der Algorithmus der Anfangssteifigkeiten ein wesentlich strengeres Konvergenzkriterium verlangt als das Newton-Raphson-Verfahren, ist bei der Kombination beider Verfahren das strengere Konvergenzkriterium anzusetzen. Testbeispiele an Stahlbetonplatten zeigen, daß der wesentliche Vorteil des Verfahrens der Anfangssteifigkeiten - die geringere Rechenzeit pro Iterationsschritt - durch die größer werdende Anzahl der Ite-

rationsschritte zumindest teilweise verloren geht. Aufgrund der Unsicherheiten im Konvergenzverhalten und der daraus resultierenden fehlenden Eindeutigkeit der Lösung (vgl. Eibl, Iványi /4.12/) liegen den Ergebnissen des Kapitels 5 das in seinem Konvergenzverhalten stabile Newton-Raphson-Verfahren zugrunde.

4.4 Inkrementell linearer Lösungsalgorithmus

Die Lösung des inkrementell linearen Gleichungssystems beansprucht einen großen Teil des gesamten Rechenaufwandes. In der Literatur /4.7/ bis /4.10/ wird mit der Gauß-Elimination ein sehr effektiver Lösungsalgorithmus vorgestellt. Irons entwickelt in /4.13/ auf der Grundlage der Gauß-Elimination einen Lösungsalgorithmus, dessen Anwendung auf finite Elemente mit Seitenmitten- oder Zentralknoten (vgl. Bild 3.4) rechentechnisch vorteilhaft ist. Dieser Ironssche Frontallöser stellt vor der Systemlösung keine expliziten globalen Systemmatrizen aus den Elementsteifigkeitsmatrizen auf. Die Koeffizienten der Unbekannten werden im Laufe der Berechnung dynamisch gespeichert. Gleichzeitig werden Unbekannte eliminiert, die in weiteren Elementen nicht mehr vorkommen. Nähere Einzelheiten zu diesem Verfahren sowie die weiteren Entwicklungen können den zahlreich erschienenen Veröffentlichungen entnommen werden, z.B. /4.14/ bis /4.22/.

4.5 Programmtechnische Bearbeitung

Zur Berechnung von Stahlbetonplatten und -schalen wurde ein Rechenprogramm auf der Grundlage des in Kapitel 3 vorgestellten Semi-Loof Elementes entwikkelt. Der Ironssche Frontalalgorithmus wird zur Lösung des inkrementell linearen Gleichungssystems verwendet. Als Konvergenzkriterium liefert ein Vergleich der bezogenen Verzerrungsenergieanteile vor und nach einem Iterationsschritt zufriedenstellende Ergebnisse

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \leq \varepsilon \qquad (4.3),$$

mit

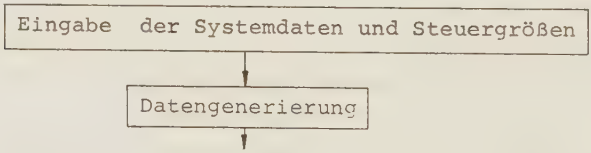
- i : Index eines Freiheitsgrades,
- n : maximale Anzahl der Freiheitsgrade,
- Δe : Änderung des Verzerrungsenergieanteils innerhalb eines Iterationsschrittes,
- e : Gesamtenergieanteil,
- ε : Toleranzgrenze.

Durch die Quadratbildung sind große Energieanteile wesentlich stärker gewichtet, so daß Oszillationen während der Iterationen keinen wesentlichen Einfluß haben. In den durchgeführten Berechnungen wurde im allgemeinen eine Toleranzgrenze

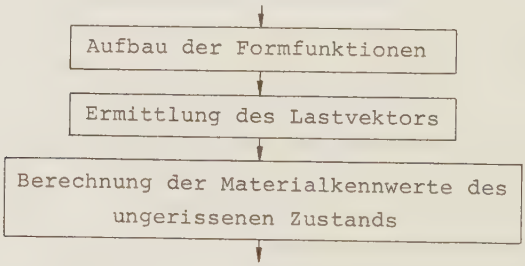
$$\varepsilon = 2\,\%$$

vorgeschrieben. Die Organisation des Programmes erlaubt es, Zwischenergebnisse abzuspeichern sowie Restarts durchzuführen. Die Datenmenge erfordert eine Bearbeitung mit Hintergrunddateien, wobei der Datentransfer blockweise vorgenommen wird. Ein übergeordnetes Hauptprogramm steuert den Ablauf der Bearbeitung, der in drei Blöcke mit mehreren Unterprogrammen gegliedert werden kann.

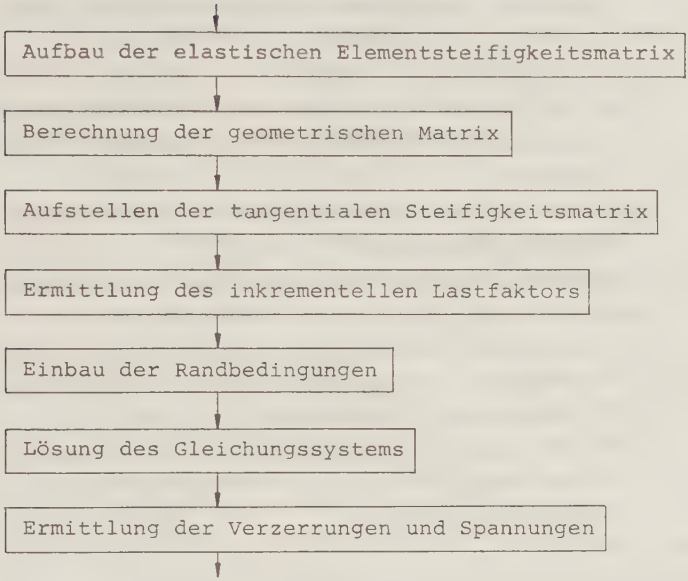
Block 1: Eingabe und Generierung der benötigten Daten mit Hilfe der Unterprogramme



Block 2: Ermittlung der Parameter und Matrizen mit konstanter Belegung mit Hilfe der Unterprogramme



Block 3: Ermittlung der Parameter und Matrizen mit veränderlicher Belegung sowie Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe der Unterprogramme



Der Berechnungsablauf wird im Bild 4.2 unter Benutzung der beschriebenen Blöcke in Form eines Flußdiagrammes vereinfacht dargestellt. Obwohl das erstellte Programm auch in der Lage ist, nach dem Verfahren der Anfangssteifigkeiten zu iterieren, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nur auf das Newton-Raphson-Verfahren mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix eingegangen. Im einzelen müssen folgende Schritte ausgeführt werden:

1. Berechnung und Besetzung der inkrementellen Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors. Es werden die Ausgangswerte des ungerissenen Zustandes angesetzt.
2. Ermittlung der inkrementellen und gesamten Knotenverschiebungen sowie der Verzerrungen und Krümmungen in der Elementbezugsschicht.

3. Bestimmung der Verzerrungen und Spannungen jeder Schicht des Elementes.
4. Rißabfrage für die Betonschichten, evtl. Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen. Änderung der Materialeigenschaften.
5. Aufbau der neuen elastischen und geometrischen Steifigkeitsmatrizen.
6. Wiederholung ab Schritt 2 und Kontrolle der Konvergenz.
7. Ist das Konvergenzkriterium noch nicht erfüllt, Wiederholung der Schritte 3 bis 6. Vergleich mit der maximalen Anzahl der Iterationen.
8. Wiederholung der Schritte 3 bis 7 und Vergleich mit der maximalen Anzahl der Lastinkremente.
9. Abbruch der Rechnung.

Der rechentechnische Ablauf zur Umlagerung der Stahlspannungen auf den Beton, der im vorhergehenden 4. Absatz nur global beschrieben wurde, wird im folgenden detaillierter betrachtet:

1. Belastung des Systems bis zur Bildung von Erstrissen.
2. Gleichgewichtsiteration mit Spannungsumlagerung und Ermittlung der Erstriß-Stahlspannung $\sigma_{sR,1}$.
3. Berechnung des geometrischen Beiwertes gemäß Gleichung (2.31).
4. Erhöhung der Belastung und Bestimmung der Stahlspannung im Riß σ_{sR} .

5. Ermittlung der Betonzugfestigkeit $\beta_{bZ,i}$ mit Hilfe der Gleichung (2.16).
6. Annahme der Anfangsstahlspannung σ_{so} gemäß Gleichung (2.30).
7. Bestimmung des Verbundbeiwertes k_v nach Gleichung (2.20) und der Einleitungslänge l_e nach Gleichung (2.37).
8. Ermittlung der fiktiven Rißspannung σ_{sR}^{num} mit Hilfe der Gleichung (2.35) und Vergleich mit der tatsächlich vorhandenen Stahlspannung im Riß σ_{sR} aus Absatz 4.
9. Für den Fall $\sigma_{sR}^{num} \geq \sigma_{sR}$ führt die Verwendung der Gleichungen (2.32), (2.26) und (2.17) zu den mittleren Stahl- und Betonspannungen der Gleichungen (2.33) sowie (2.34).
10. Für den Fall $\sigma_{sR}^{num} < \sigma_{sR}$ wurde im 6. Absatz die Anfangsstahlspannung σ_{so} und damit auch der Verbundbeiwert k_v zu niedrig angesetzt. Die folgenden Schritte 11 bis 15 sind durchzuführen.
11. Aus Gleichung (2.28) ergibt sich mit Gleichung (2.29) eine erste Abschätzung der Anfangsstahlspannung σ_{so}^{i} und mit Gleichung (2.20) des Verbundbeiwertes k_v^{i} .
12. Die Gleichungen (2.37) bis (2.39) liefern die Einleitungslänge l_e und den mittleren Rißabstand a_m .
13. Mit Hilfe der Gleichungen (2.18) und (2.24) läßt sich ausgehend von der Stahlspanung im Riß σ_{sR} die Anfangsstahlspannung σ_{so}^{i+1} ermitteln.
14. Falls $\sigma_{so}^{i+1} > \sigma_{so}^{i}$ ist der Verbundbeiwert der Gleichung (2.20) zu korrigieren und Absatz 13 mit k_v^{i+1} zu wiederholen.

15. Die mittleren Stahl- und Betonspannungen ergeben sich aus den Gleichungen (2.40) und (2.41).

Die Programmiersprache des erstellten Programmes ist Fortran 77. Die im folgenden Kapitel 5 vorgestellten Beispiele, gerechnet auf einer CYBER-175-Anlage, demonstrieren, daß das Programm als Entscheidungshilfe bei der Suche nach sicherheitstechnisch optimierten Lösungen verwendet werden kann.

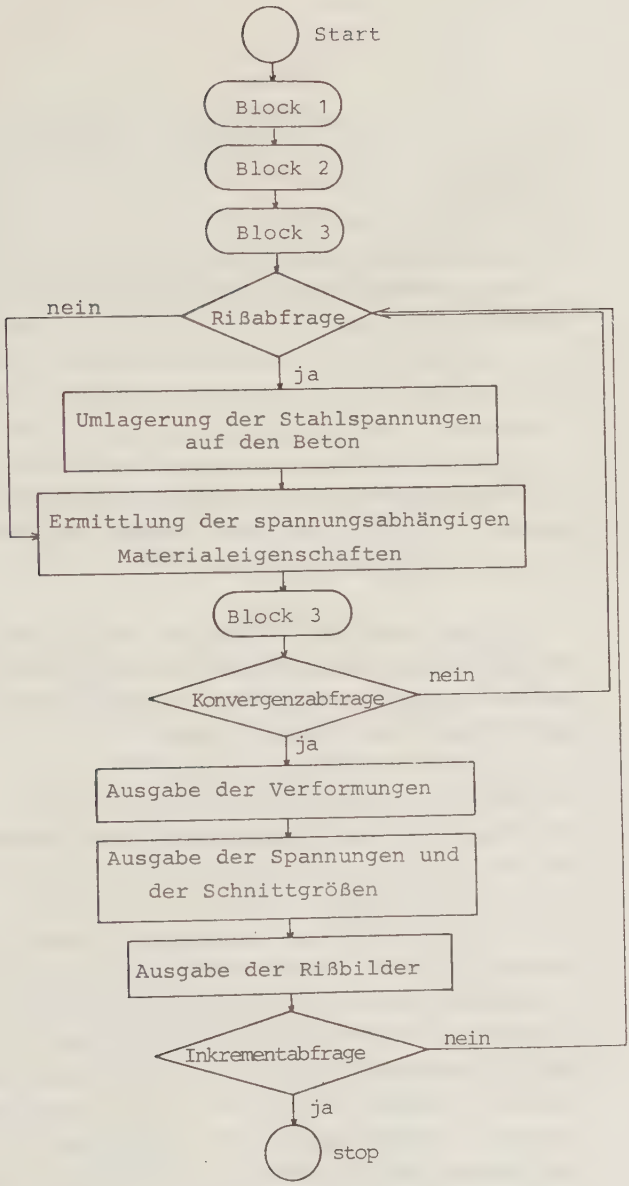


Bild 4.2
Ablaufdiagramm des Rechenganges

5. Beispiele

5.1 Allgemeines

Im folgenden Kapitel werden die bisher vorgestellten Grundlagen anhand einiger ausgewählter Beispiele auf ihre Anwendbarkeit überprüft.

Über das Konvergenzverhalten des linearen Semi-Loof-Elementes liegen Untersuchungen vor, z. B. in /5.1, /5.2/ und die dort angegebene weiterführende Literatur. Die folgenden Betrachtungen können sich deshalb auf das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetonsystemen beschränken.

Die große Anzahl der Parameter, welche die analytische Lösung beeinflussen, fordert zunächst eine "Eichung" der Einflußgrößen. Dieses geschieht zweckmäßig anhand von Versuchsergebnissen.

An Beispiel 1, einer Stahlbetonplatte aus einer Versuchsreihe nach Vißmann /5.3/, wird insbesondere das Verformungsverhalten des diskretisierten Finite-Element-Modells betrachtet. Geometrisch nichtlineare Einflüsse bleiben unberücksichtigt. Beispiel 2, eine Kugelkalotte nach Zell /5.4/, ermöglicht eine Abschätzung der Einflüsse aus geometrisch nichtlinearem Tragverhalten. An einem weiterführenden Beispiel 3 - einem Naturzugkühlturm, beansprucht durch Stützensenkung - werden die gewonnenen Erkenntnisse extrapoliert, um die Qualität der Ergebnisse an beliebigen Stahlbetonsystemen zu überprüfen.

5.2 Eingespannte Platte unter Flächenlast

Aus dem von Vißmann in /5.3/ vorgestellten Versuchsprogramm wird im folgenden exemplarisch die Serie NB (Platten mit schlaffer Bewehrung aus BSt 42o/5oo RK) zu vergleichenden Untersuchungen herangezogen. In Bild 5.1 sind die wichtigsten Abmessungen sowie die Art und Lage der Bewehrung dargestellt. Bild 5.2 beschreibt das System als diskretisiertes Modell.

Dieses System eignet sich wegen seiner vorwiegenden Biegebeanspruchung und der damit verbundenen Rißbildung für folgende Parameterstudien.

Zunächst wird über das Verformungsverhalten der Platte unter anwachsender Belastung die Anzahl der Schichten bestimmt, die notwendig ist, um Gleichung (3.36) zufriedenstellend zu erfüllen. Bild 5.3 zeigt anhand der Verformungen des Punktes P (vgl. Bild 5.2), daß ab 17 Schichten identischer Dicke der Einfluß der Schichtenanzahl auf das Verformungsverhalten vernachlässigt werden kann.

In Bild 5.4 sind einige in der Literatur häufig verwendete Materialansätze dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren (a) gegenübergestellt:

(a) - Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen sowie der streuende Charakter der Betonzugfestigkeit werden berücksichtigt.

(b) - Die Betonzugfestigkeit ist eine feste Größe und entspricht dem 5%- Fraktilenwert.Eine Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen

wird ausgeschlossen. Dieses Vorgehen entspricht näherungsweise dem Ansatz von Link /5.5/.

(c) - Die Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt. Eine Spannungsumlagerung bleibt unberücksichtigt. Dieses entspricht näherungsweise einem Vorgehen gemäß DIN 1o45 (Ausg. 1978), jedoch unter Berücksichtigung der Betonumschnürungsfestigkeit im Druck-/ Druck- Bereich.

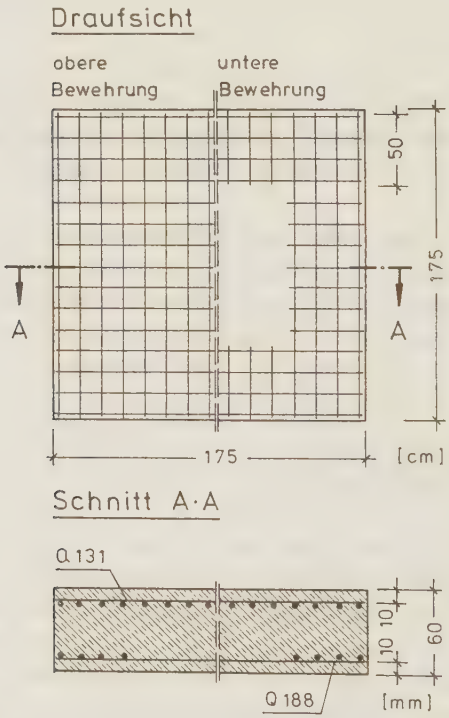


Bild 5.1
Allseitig eingespannte Platte nach Vißmann/5.3/

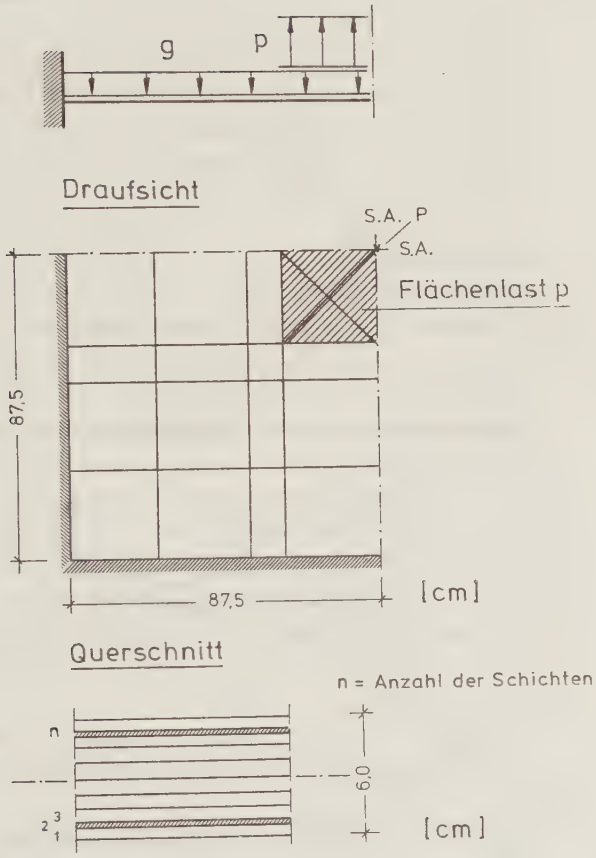


Bild 5.2
Allseitig eingespannte Platte nach /5.3/
Diskretisierung und Ort der Belastung

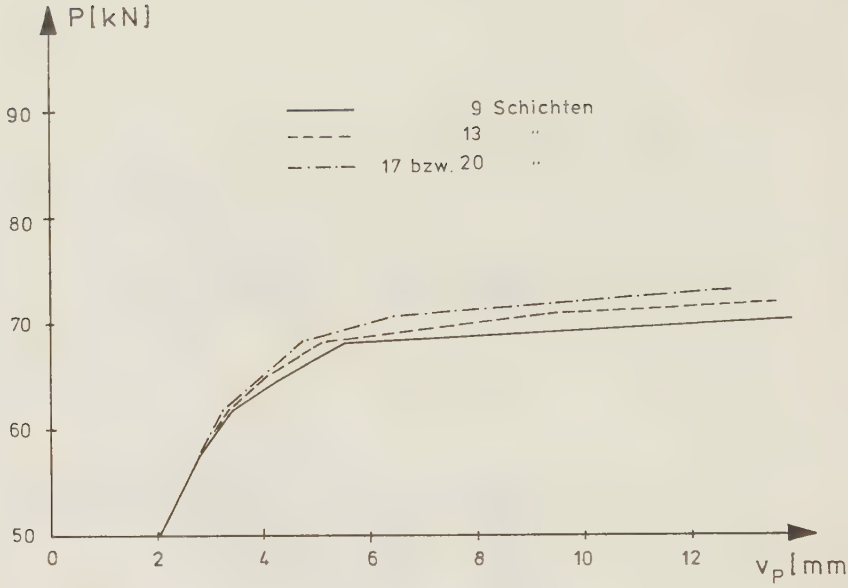


Bild 5.3
Verformungsverhalten in Abhängigkeit der Schichtenanzahl

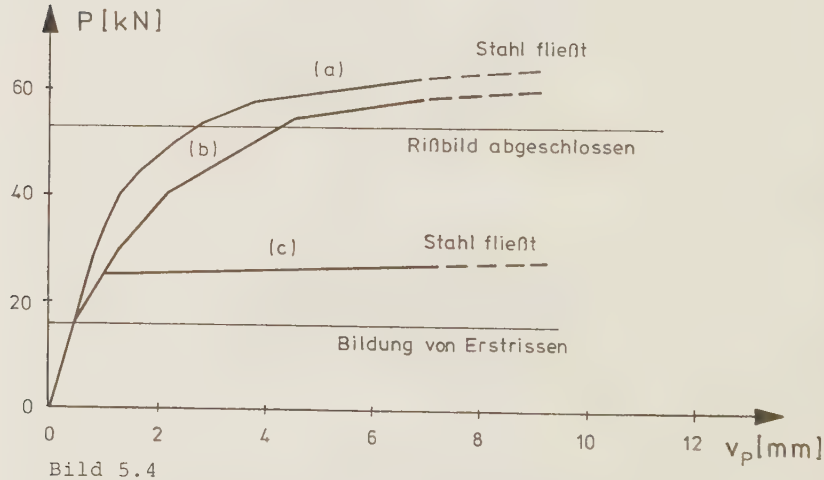


Bild 5.4
Verformungsverhalten in Abhängigkeit unterschiedlicher Materialansätze (Erläuterung vgl. Text)

Bis zur Bildung von Erstrissen unter der Belastung P = 16 kN ist der Last-Verformungs-Verlauf des Punktes P in allen drei Fällen identisch und entspricht einer linearen Berechnung.

Unter Laststeigerung findet mit dem Ansatz (c) eine Spannungsumlagerung nur in unmittelbarer Umgebung der Ankerplatte statt. Unter der Laststufe P = 24 kN erreicht der Bewehrungsstahl lokal die Streckgrenze. Mit dem Fließen des Stahls versagt das System.

Die Materialansätz (a) und (b) führen vorwiegend im Bereich der Rißbildung zu unterschiedlichen Last-Verformungs-Verläufen. Ansatz (a) zeigt gegenüber (b) einen Zuwachs an Systemsteifigkeit und damit geringere Verformungen. Der Steifigkeitszuwachs wird mit der Bildung der Erstrisse größer und fällt oberhalb des Lastniveaus mit abgeschlossener Rißbildung P = 54 kN auf Null. Eine Spannungsumlagerung in Bereiche mit Tragreserven ist bis zum Fließen des Bewehrungsstahles zu beobachten. Hierbei wird unter dem Ansatz (a) ein größerer Bereich beansprucht als unter (b). Nach dem Fließen des Stahles versagt sowohl das System (a) unter der Bruchlast P_u = 64 kN als auch (b) unter der Bruchlast P_u = 59 kN, wobei die Erhöhung der Tragfähigkeit des Systems ihre Ursache im größeren Lastabtragungsbereich hat.

Das Verformungsverhalten des numerischen Modells unter dem Materialansatz (a) stimmt mit dem aus Versuchen gewonnenen Werten, /5.3/, /5.4/ u.a. weitgehend überein.

Die dargestellten Voruntersuchungen ermöglichen nunmehr einen direkten Vergleich der numerischen Berechnung mit den Versuchsergebnissen von Vißmann/5.3/.

Aus den parallel zu den Platten hergestellten Betonzylindern ergab sich eine mittlere Zylinderdruckfestigkeit β_{cm}=46,3 N/mm^2. Der mittlere Elastizitätsmodul, gemessen als Sekantenmodul im ersten Drittel der im zentrischen Druckversuch gewonnenen Last-Verformungskurve, ergab sich zu E_b = 314oo N/mm^2. Als Bewehrungsstahl wurde ein BSt 42o/5oo RK verwendet mit einem Bewehrungsdurchmesser $d_s \leq$ 6 mm. Die Belastung wurde mittels einer auf der Plattenunterseite befestigten Ankerplatte aufgebracht.

Das der Berechnung zugrundeliegende System kann Bild 5.2 entnommen werden. Weitere Eingabeparameter sind :

Anzahl der Schichten	n=17,
Elastizitätsmodul Beton	E_b=3,14·1o^{4}N/mm^2,
Querkontraktionszahl	ν =o.2o,
Zylinderdruckfestigkeit	β_{cm}=46,3 N/mm^2,
Elastizitätsmodul Bewehrungsstahl	E_s=2,1·1o^5 N/mm^2,
Bewehrungsprozent (oben)	μ =o,218 %,
Bewehrungsprozent (unten)	μ =o,313 %.

Ausgehend von einer angenommenen Bruchlast P_u = 8o KN, dieses stimmt mit der experimentell bestimmten Bruchlast überein, wird die Belastung in zwanzig Lastinkrementen aufgebracht. Im Mittel werden innerhalb einer Belastungsstufe vier Iterationsschritte benötigt, um die zugelassene Toleranzgrenze (vgl. Kapitel 4) zu unterschreiten.

Bild 5.5 vergleicht die im Experiment gemessenen Verformungswerte des Punktes P (vgl. Bild 5.2) mit denen der numerischen Berechnung. Bevorzugt wird der Bereich vor dem Erreichen der Stahlfließgrenze dargestellt.

Die Bilder 5.6 bis 5.8 zeigen vergleichend gemessene und berechnete Rißbilder unterschiedlicher Beanspruchungsniveaus. Gemessene Rißbilder der Plattenunterseite sowie im Bereich der Ankerplatte auch auf der Oberseite liegen nicht vor, sodaß an diesen Stellen ein direkter Vergleich nicht möglich ist.

Trotz der relativ groben Netzeinteilung des diskretisierten Systems zeigen die Ergebnisse, daß lokale Rißstrukturen und deren Entwicklung zufriedenstellend beschrieben werden können. Das Verformungsverhalten unter Belastung stimmt -auch bis zur abgeschlossenen Rißbildung- mit den Versuchsergebnissen weitgehend überein.

Zum Vergleich der Rißbilder aus Versuch und Rechnung müssen einige Überlegungen gemacht werden. Das Rechenmodell geht von schichtweise verschmierten Rissen aus, sodaß sich die Rißabstände aus der Elementaufteilung ergeben und nicht als wirkliche Abstände interpretiert werden können. Das numerische Modell läßt nur im Hinblick auf die Lage,Ausbreitung, Rißtiefe und -weite Aussagen zu. Einflüsse aus einer Querkraftbeanspruchung können nicht berücksichtigt werden.

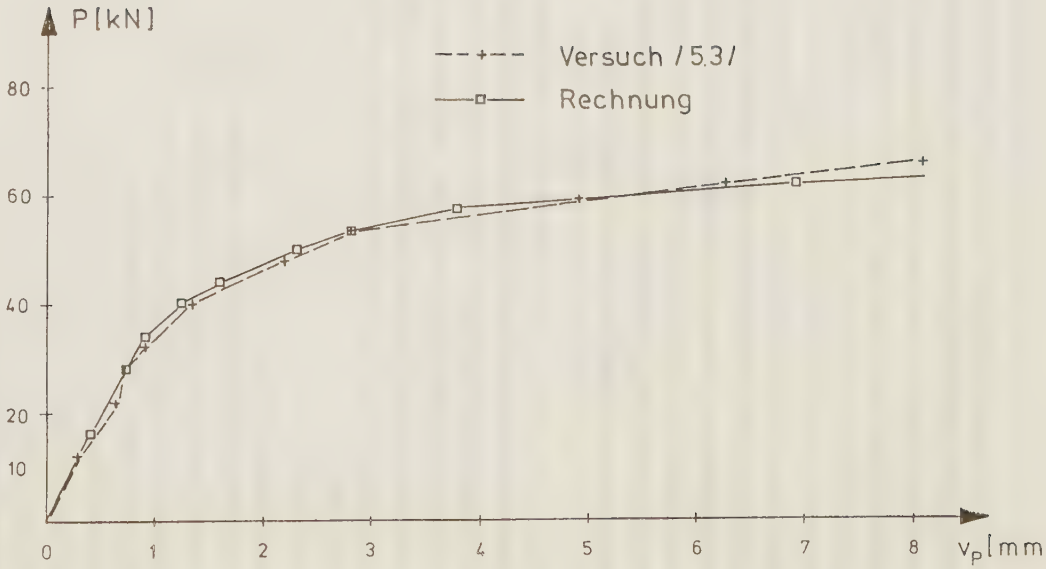
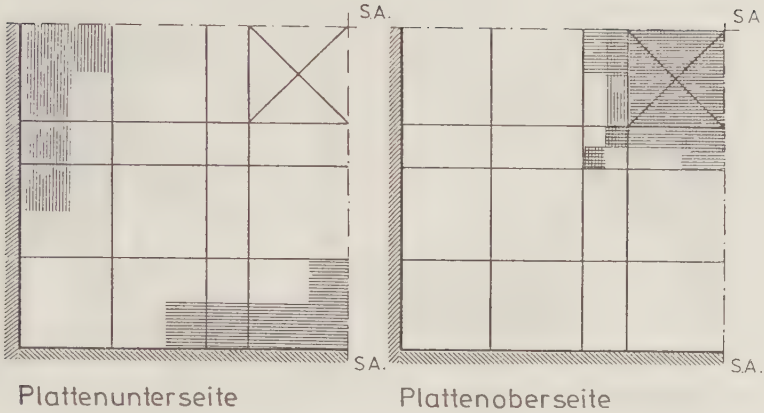


Bild 5.5
Verformungsverhalten - Vergleich der Ergebnisse aus Versuch und Berechnung

Vergleichsrechnung

Laststufe P = 39,6 kN



Exp. Untersuchung

Laststufe P = 38,0 kN

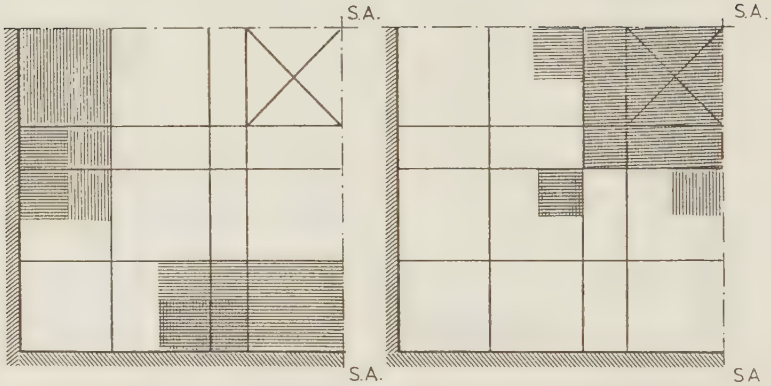
einachsial gerissen

zweiachsial gerissen

Bild 5.6
Rißbildvergleich

Vergleichsrechnung

Laststufe P = 44,6 kN



Plattenunterseite

Plattenoberseite

Exp. Untersuchung

Laststufe P = 42,0 kN

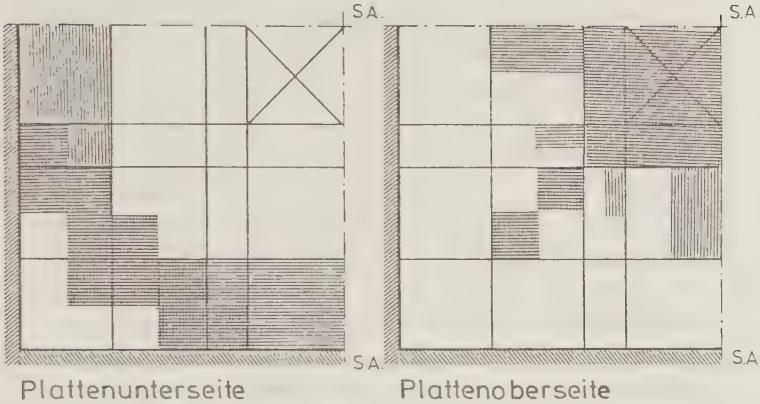
einachsial gerissen

zweiachsial gerissen

Bild 5.7
Rißbildvergleich

Vergleichsrechnung

Laststufe P = 53,7 kN



Exp. Untersuchung

Laststufe P = 54,0 kN

einachsial gerissen

zweiachsial gerissen

Bild 5.8
Rißbildvergleich

5.3 Kugelschale unter Flächenlast

Das Tragverhalten von Kugelschalen unter flächenhafter Belastungssteigerung bis zum Bruch wird von Zell /5.4/ in einem Versuchsprogramm untersucht.

Dieses Stahlbetontragwerk wird unter Belastung sowohl durch Biegekräfte als auch durch Membrankräfte beansprucht. Wie die Versuchsergebnisse zeigen, tritt nach der abgeschlossenen Rißbildung der Bruch durch Versagen der Betondruckzone in der Umgebung des Schalenmittelpunktes auf.

Neben der bereits im ersten Beispiel (Kapitel 5.2) dargestellten Rißfortpflanzung wird anhand dieses zweiten Beispiels insbesondere der Einfluß der geometrischen Nichtlinearitäten und die Umlagerung von inneren Schnittgrößen infolge der Steifigkeitsverschiebungen betrachtet.

In Bild 5.9 und Bild 5.1o sind die Hauptabmessungen des Systems, ein wesentlicher Detailpunkt sowie die Art und Lage der Bewehrung dargestellt.

Aus dem Versuchsprogramm von Zell /5.4/ eignet sich die Reihe NB - Q (Kugelschale aus Normalbeton unter Flächenlast) für eine vergleichende Betrachtung. Dieser Versuchsreihe liegt eine gemessene mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons $\beta_{cm} = 43{,}4\ N/mm^2$ zugrunde. Als Bewehrungsstahl wurde ein BSt 5oo/55o RK für die Schale und ein BSt 42o/5oo RK für den Ringbalken verwendet. Zell macht in /5.4/ keine Angaben über den mittleren Elastizitätsmodul des Betons.

Numerische Voruntersuchungen zeigen, daß mit E_b = 31400 N/mm^2 eine ausreichend genaue Anpassung an die Anfangsneigung der Last-Verformungs-Beziehung (vgl. Bild 5.12) erzielt wird.

Das der Berechnung zugrundeliegende System kann Bild 5.11 entnommen werden. Weitere Eingabeparameter sind :

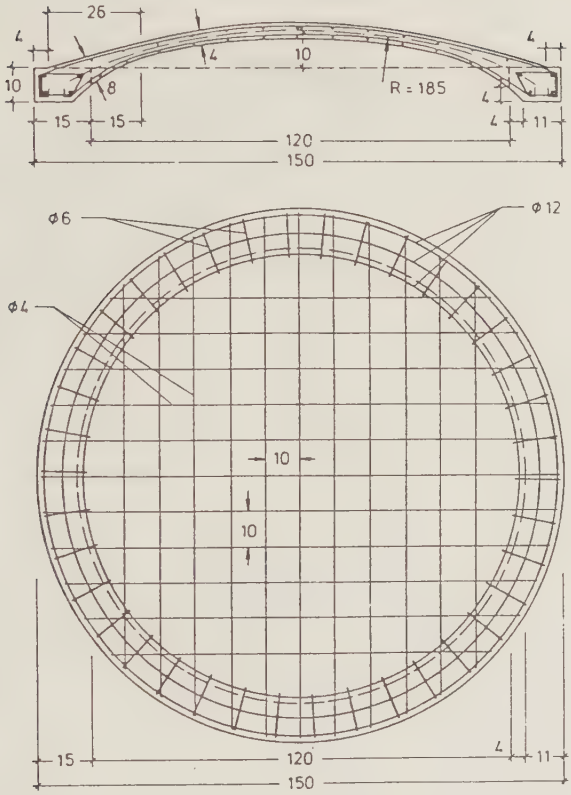
Anzahl der Lastinkremente	nl	=20,
Anzahl der Schichten	n	=17,
Elastizitätsmodul Beton	E_b	=3,14 10^4 N/mm^2,
Querkontraktionszahl	ν	=0,20,
Zylinderdruckfestigkeit	β_{cm}	=43,4 N/mm^2,
Elastizitätsmodul Bewehrungsstahl	E_s	=2,1 10^5 N/mm^2,
Bewehrungsprozente (oben bzw. untenliegend):		
Schale Dicke t=4 cm	μ	=0,314 %,
t=7 cm	μ	=0,180 %,
Ringbalken Ringrichtung	μ	=2,050 %,
Meridianrichtung	μ	=0,283 %.

Die angegebenen Eingangsparameter führen zu einer zufriedenstellenden Übereinstimmung des gemessenen und des berechneten Last-Verformungs-Verlaufes des Schalenmittelpunktes (Bild 5.12) bis in die unmittelbare Nähe der Bruchlast.

Eine Vergleichsrechnung ohne Berücksichtigung der geometrisch nichtlinearen Einflüsse aus der Membrantragwirkung zeigt bis zur Laststufe P = 627 KN keine wesentlichen Auswirkungen auf das Verformungsverhalten des Schalenmittelpunktes. Unter rechnerischer Bruchlast P_u = 822 KN ermittelt sich eine um 6,3 % geringere Verformung.

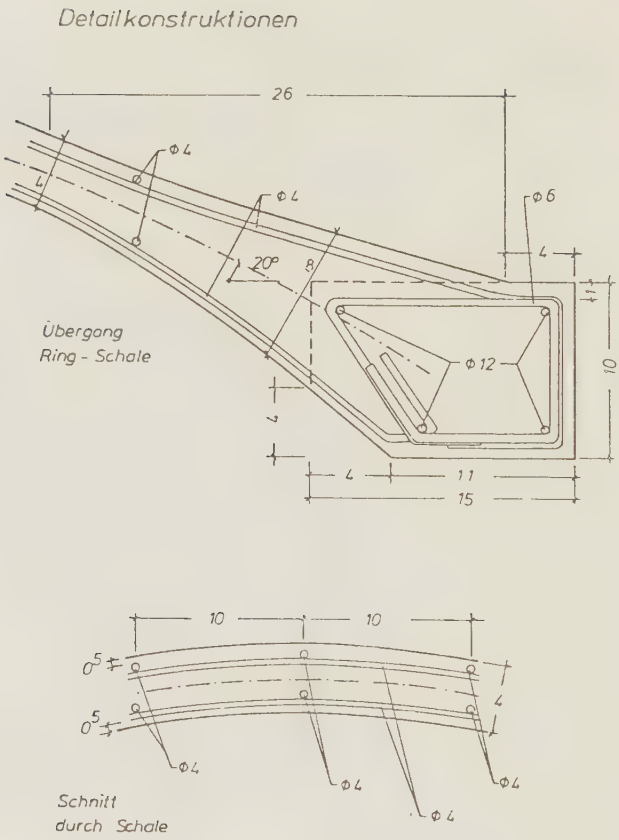
Mit den Schnittgrößendefinitionen aus Bild 5.13 ergeben sich die Verläufe der Biegemomente in Meridianrichtung m_{22}, in Ringrichtung m_{11} und der Membranringschnittkraft n_{11} aus den Bildern 5.14 bis 5.16. Vergleichend wird eine lineare Berechnung der Kugelschale nach Zell /5.5/ dargestellt. Abweichungen der eigenen linearen Berechnung von den Ergebnissen nach Zell sind auf unterschiedliche diskrete Modelle zurückzuführen und beschränken sich auf den Einfluß des Ringbalkens. Auf eine Darstellung der Membranschnittkraft n_{22} in Meridianrichtung wird im folgenden verzichtet, da sie als Druckkraft keine wesentlichen Änderungen beim Übergang zur nichtlinearen Berechnung aufweist. Ebenfalls verzichtet wird auf die Darstellung der geometrisch nichtlinearen Einflüsse auf die Schnittgrößen, die unter der rechnerisch ermittelten Bruchlast bis zu 5% betragen. Eine Betrachtung der Momentenverläufe (Bild 5.14 und Bild 5.15), die -im Zusammenhang mit der Ringzugkraft n_{11}(Bild 5.16)- verantwortlich sind für die Rißbildung, zeigt eine Umlagerung der Spannungen in Bereiche ungestörter Steifigkeiten. In Übereinstimmung mit den Versuchen /5.4/ ergibt die Berechnung eine Rißentwicklung die am Ringbalken beginnt und sich in Meridianrichtung fortsetzt.
Das veränderte Systemtragverhalten führt zu einer Erhöhung der Biegemomente im Scheitelbereich um ca. 90%. Im Einspannbereich des Randbalkens zeigt nur das Biegemoment in Meridianrichtung m_{22} eine ausgeprägte Erhöhung um ca. 70%. Wesentlich geringer sind die Auswirkungen der Nichtlinearitäten auf die Membrankraft in Ringrichtung n_{11}, die am Scheitelpunkt um ca. 25% und am Ringbalken um ca. 15% erhöhte Ordinaten ergeben.

Bewehrungsplan
Kugelschale



Schalengeometrie und
Bewehrungsführung
(Maße in cm)

Bild 5.9
Kugelschale nach Zell /5.4/



Übergang Ring / Schale
Schnitt im Scheitelbereich
(Maße in cm)

Bild 5.1o
Kugelschale nach Zell /5.4/ - Detail Ringbalken

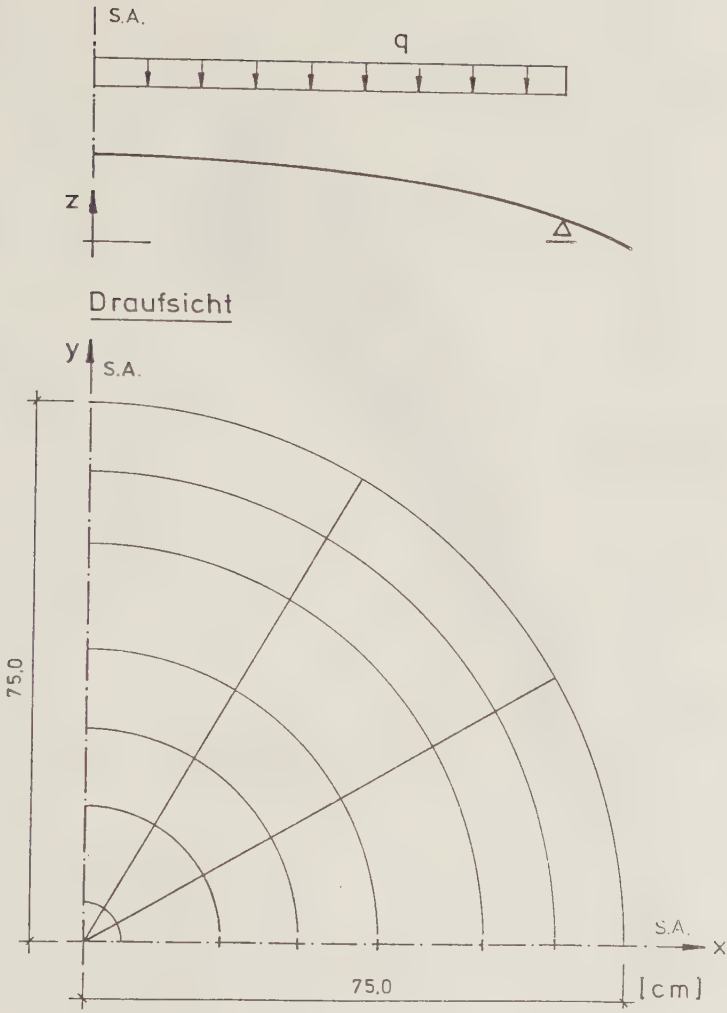


Bild 5.11
Kugelschale nach Zell /5.4/
Diskretisiertes System und Koordinatenachsen

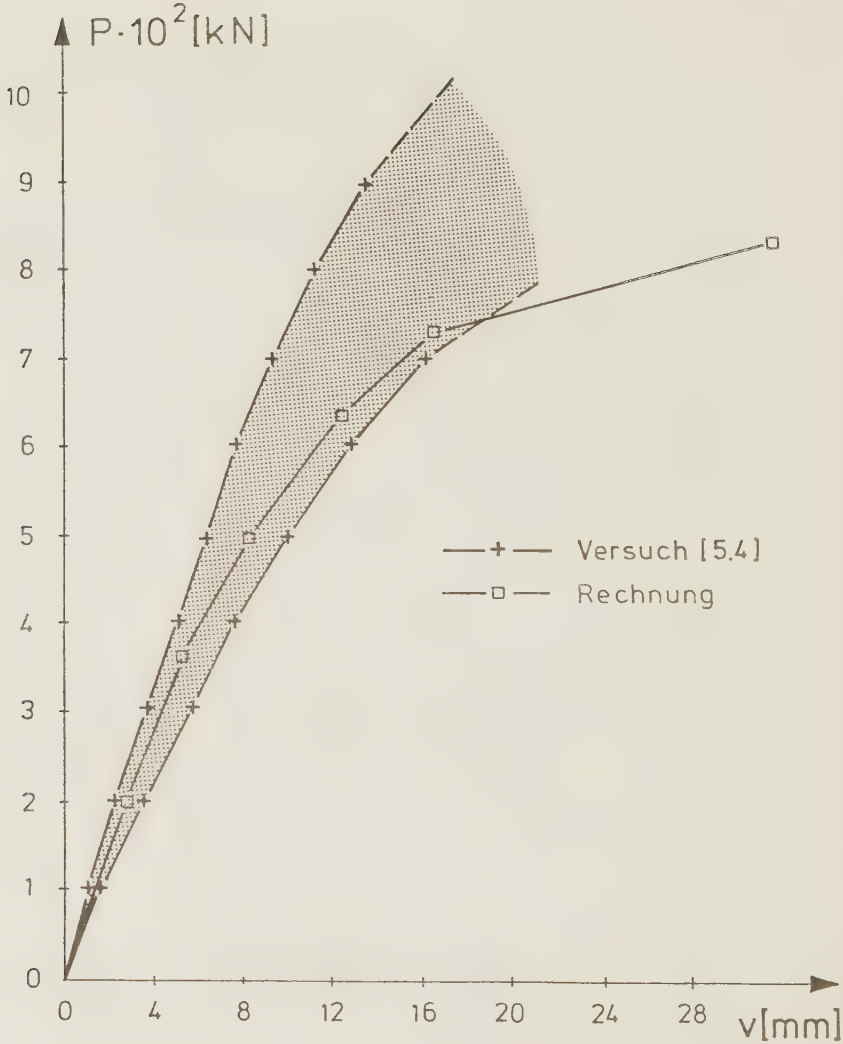


Bild 5.12
Verformungsverhalten des Schalenmittelpunktes
Vergleich der Ergebnisse aus Versuch und Berechnung

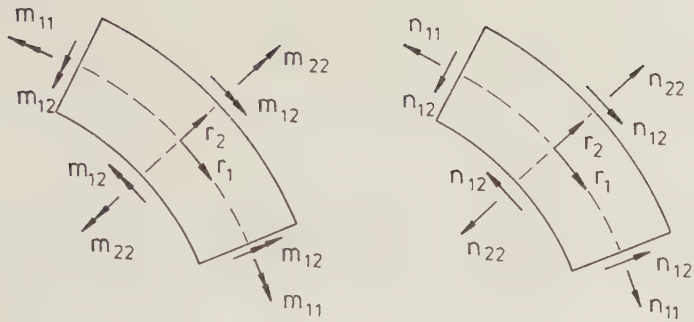


Bild 5.13
Schnittgrößendefinition am Element

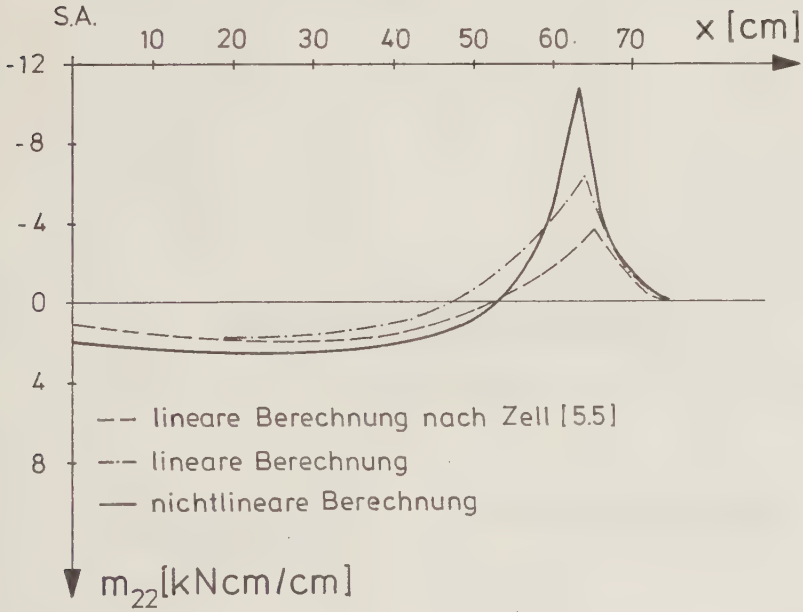


Bild 5.14
Kugelschale nach Zell /5.5 /
Meridianmoment m_{22} infolge der Flächenlast 41o kN/m^2

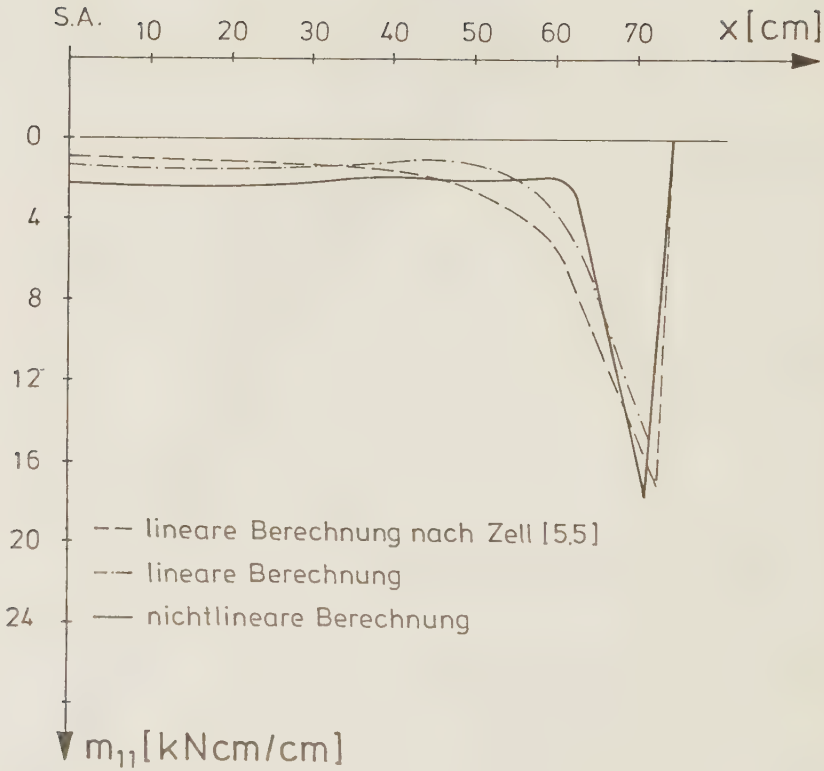


Bild 5.15
Kugelschale nach Zell /5.5/
Ringmoment m_{11} infolge der Flächenlast 41o kN/m^2

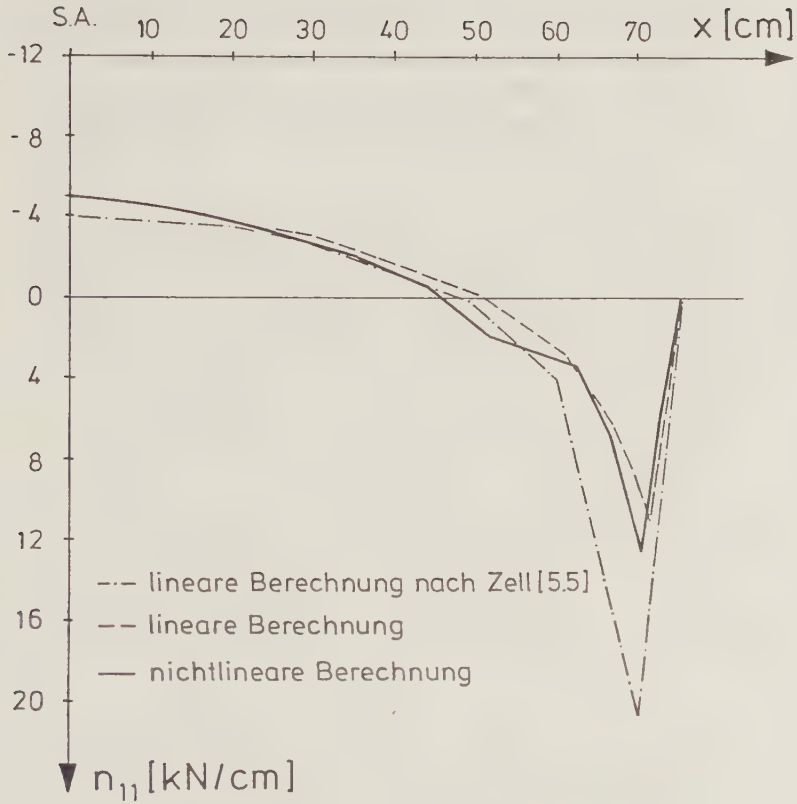


Bild 5.16
Kugelschale nach Zell /5.5/
Membrankraft n_{11} in Ringrichtung infolge
der Flächenlast 41o kN/m^2

5.4 Naturzugkühlturm unter Eigengewicht und Stützensenkung

Veränderliche Windlasten in Kombination mit Eigengewicht und Stützensenkungen führen trotz der kleinen Wanddicken von Naturzugkühltürmen neben den Membrankräften zu großen Biegebeanspruchungen, deren Auswirkungen zu einem nichtlinearen Tragverhalten führen.

Die wenigen Arbeiten, die sich mit der Beanspruchung des Kühlturms infolge Stützensenkung beschäftigen, z. B. Wunderlich /5.6/, /5.7/, Flessner /5.8/ und Peters /5.9/, beruhen auf linearen Theorien. Diese als erste Abschätzungen gültigen Untersuchungen zeigen, daß Kühlturmschalen insbesondere gegenüber tangentialen Verschiebungen des unteren Randes empfindlich reagieren und schon kleine Senkungsamplituden zu erheblichen Verformungen führen. Aus diesem Grund wird im allgemeinen durch ein System aus radial angeordneten Zerrbalken und Hubfundamenten einer Stützensenkung entgegengewirkt. Vor der Wiederherstellung der ursprünglichen Fundamentlagen treten jedoch infolge Steifigkeitsveränderungen erhebliche Spannungsumlagerungen auf.

Im folgenden werden die Erfahrungen aus den vorhergehenden Kapiteln auf die Untersuchung eines Naturzugkühlturmes aus Stahlbeton unter Eigengewicht und Stützensenkung extrapoliert.

Die Mittelfläche der untersuchten Kühlturmschale, die als Rotationshyperboloid dargestellt wird, die Abmessungen des oberen Aussteifungsringes sowie der Verlauf der Schalendicke und der Bewehrung über die

Höhe werden in den Bildern 5.17 und 5.18 abgebildet. Das diskretisierte System und die Darstellung der Schnittgrößen kann Bild 5.19 entnommen werden.

Bergsenkungen oder andere Ursachen für Fundamentsetzungen können im Extremfalle bis zu einer Art Sattellagerung der Kühlturmschale führen. Wegen der großen Basisdurchmesser wird im allgemeinen jedoch nur ein Teil des unteren Randes beeinflußt.

Der untersuchte Setzungsverlauf geht aus von einem Maximalwert der Tangentialverschiebung v = 1o cm bei $\varphi = o^o$. Nach $\varphi = 6o^o$ ist die cosinusförmige Verschiebung abgeklungen.

Weitere Eingangsparameter der numerischen Berechnung sind :

Anzahl der Lastinkremente	nl	=1o,
Anzahl der Schichten	n	=17,
Elastizitätsmodul Beton	E_b	$=3,4\ 1o^4\ N/mm^2$,
Querkontraktionszahl	ν	=o,2o,
Zylinderdruckfestigkeit	β_{cm}	$=35,o\ N/mm^2$,
Elastizitätsmodul Bewehrungsstahl	E_s	$=2,1\ 1o^5\ N/mm^2$,

Dickenverlauf siehe Bild 5.18,
Bewehrungsprozente siehe Bild 5.18.

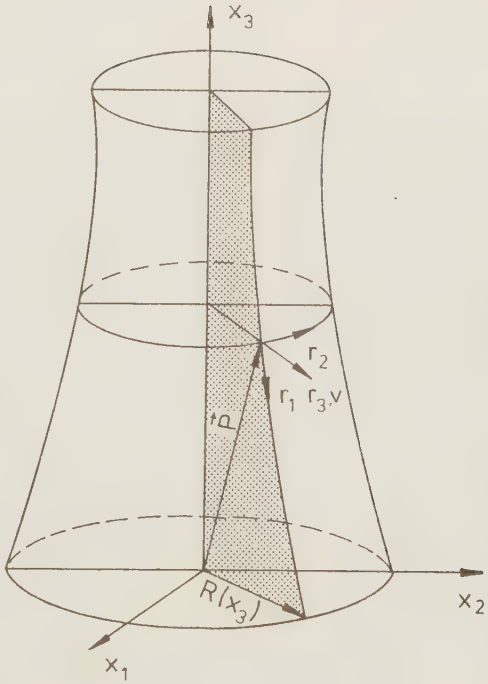
Die Bilder 5.2o bis 5.25 geben einen Eindruck von der Größe und Verteilung der Membran- und Biegeschnittgrößen getrennt nach der Belastungsart Eigengewicht (Bild 5.2o und 5.21) sowie Stützensenkung (Bild 5.22 bis Bild 5.25) auf der Grundlage einer linearen Berechnung. Der Verlauf der horizontalen Verschiebung v infolge Stützensenkung ist Bild 5.26 zu entnehmen.

Unter den Voraussetzungen konstanter Wanddicke und fehlendem Abschlußring sowie homogenem, isotropem Material betrachtet Wunderlich in /5.7/ die Schnittgrößen infolge Stützensenkung. Auf eine weitere Interpretation wird deshalb an dieser Stelle verzichtet.

Die Ergebnisse einer nichtlinearen Berechnung mit den bereits angegebenen Eingabedaten werden in den Bildern 5.27 bis 5.31 dargestellt.

Ausgehend von den linear ermittelten Schnittgrößen (Bild 5.2o bis 5.25) wird insbesondere der Bereich bis $\varphi = 6o^{o}$ -dieses entspricht dem Eintragungsbereich der Vorverformung- beansprucht. Bild 5.27 zeigt an diesen Stellen das Auftreten von Rissen sowohl an der Schaleninnenfläche als auch an der Schalenaußenfläche. Die Umgebung der Taillenlage befindet sich im Beanspruchungszustand, der zu Erstrissen führt. Die Rißweiten betragen im Mittel nach Gleichung (2.44) $w = o{,}ooo3$ mm. Die Rißtiefe entspricht der Betondeckung. Da an dieser Stelle keine wesentliche Steifigkeitsänderung stattgefunden hat, ist eine Umlagerung von Spannungen nicht zu erwarten. Dieses bestätigen die Bilder 5.28 bis 5.31. Am unteren Schalenrand ist das Rißbild im wesentlichen abgeschlossen, wobei die Rißtiefe auf der Schaleninnenseite nahezu 5o % der Querschnittsdicke umfaßt. Zusammen mit der Rißbildung der Schalenaußenseite ergibt sich in diesem lokal begrenzten Bereich eine Querschnittsschwächung um ca. 75 %. Bild 5.28 zeigt, daß diese Steifigkeitsabminderung keinen wesentlichen Einfluß auf die Meridiandruckkraft n_{11} hat. Die Ringzugkräfte n_{22} (Bild 5.29) werden

dagegen in großem Maße in benachbarte Bereiche mit größeren Steifigkeiten umgelagert. Die Momente in Ringrichtung m_{22} (Bild 5.31) werden ebenfalls abgebaut. Das zunächst positive Moment in Meridianrichtung m_{11} wird mit zunehmender Rißbildung kleiner. Bei 5o % der Vorverformung v = 1o cm wechselt das Vorzeichen. Der Absolutwert des Momentes steigt bis zu den aus Bild 5.3o ersichtlichen Größen. Eine Bemessung des Stahlbetonquerschnittes nach den aus einer linearen Theorie ermittelten Werten führt an dieser Stelle zu einer nicht ausreichend dimensionierten Bewehrung. Die Verformungsdifferenzen zwischen der linearen und der nichtlinearen Berechnung betragen im Mittel nur einige Millimeter, sodaß auf eine gegenüberstellende Darstellung verzichtet wird.



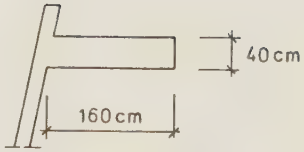


Bild 5.17

Kühlturmgeometrie, oberer Aussteifungsring sowie Koordinaten

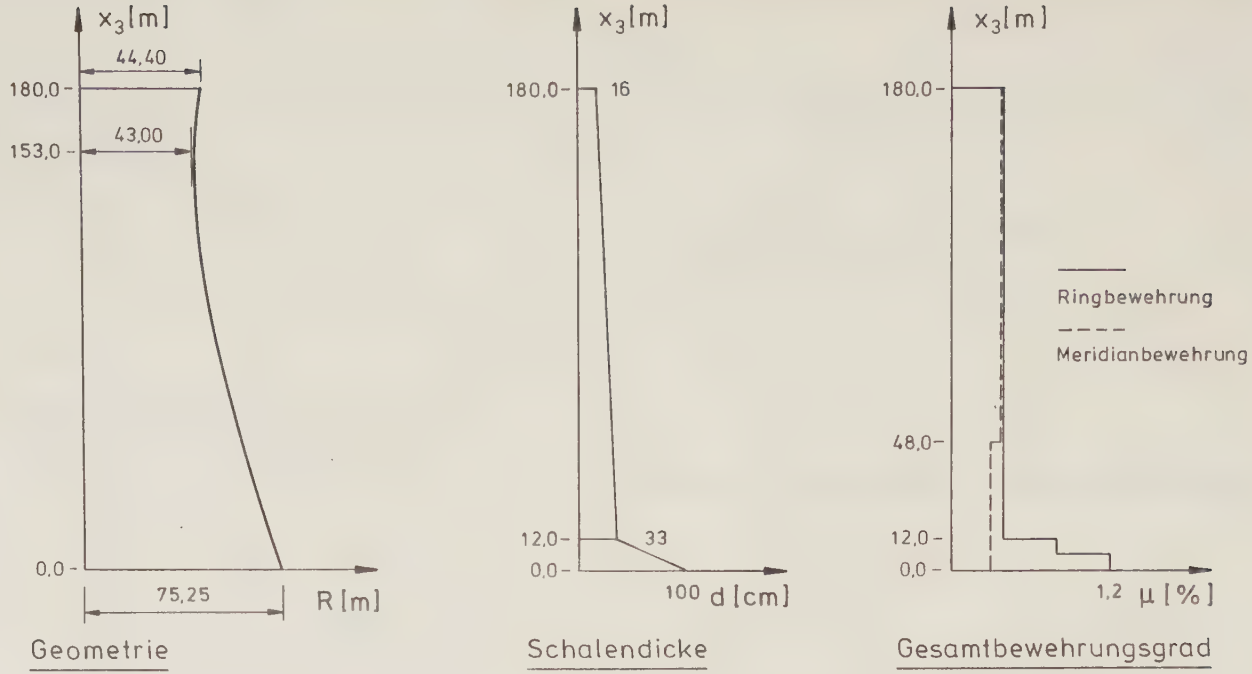
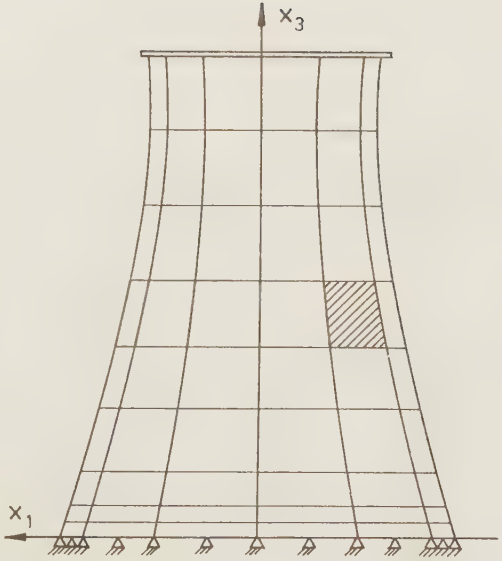
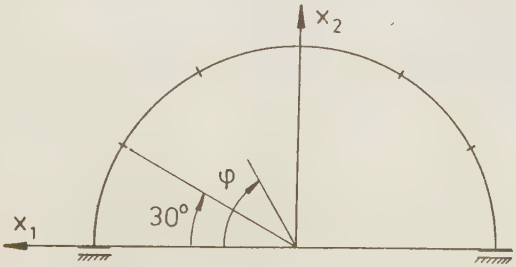


Bild 5.18
Kühlturmgeometrie, Hauptabmessungen sowie Dicken- und Bewehrungsverlauf





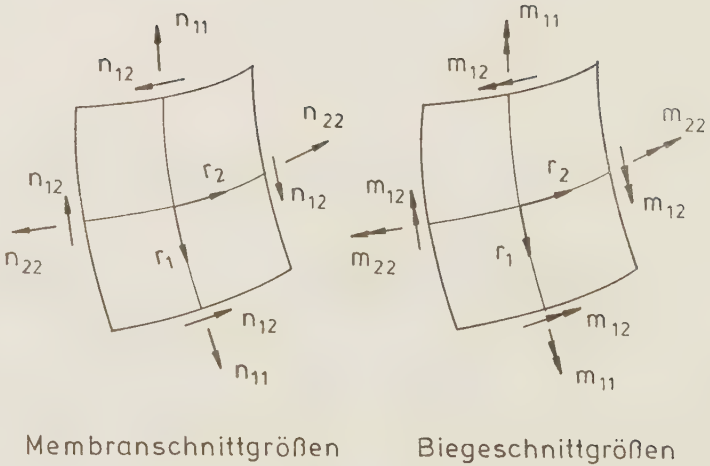


Bild 5.19
Diskretes System und
Schnittgrößen am Schalenelement

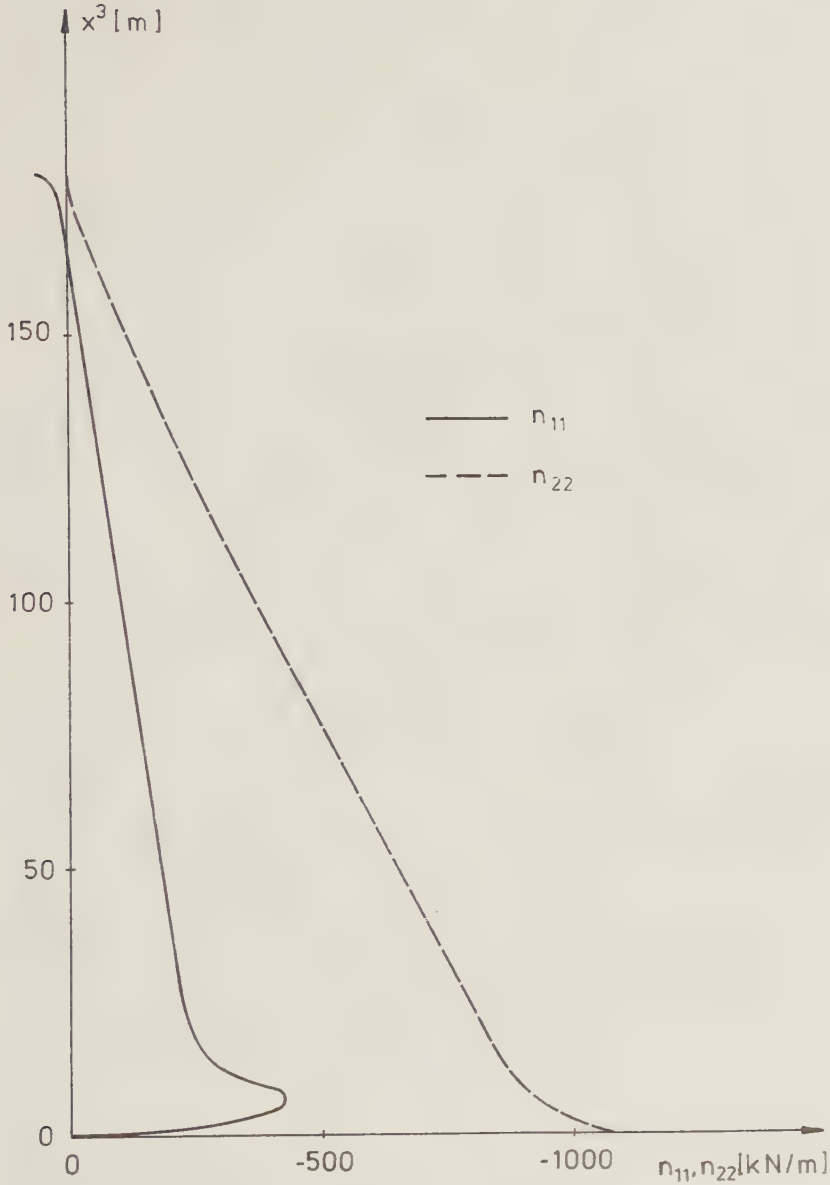


Bild 5.2o
Normalkraft in Ringrichtung n_{22} und in Meridianrichtung n_{11} infolge Eigengewicht

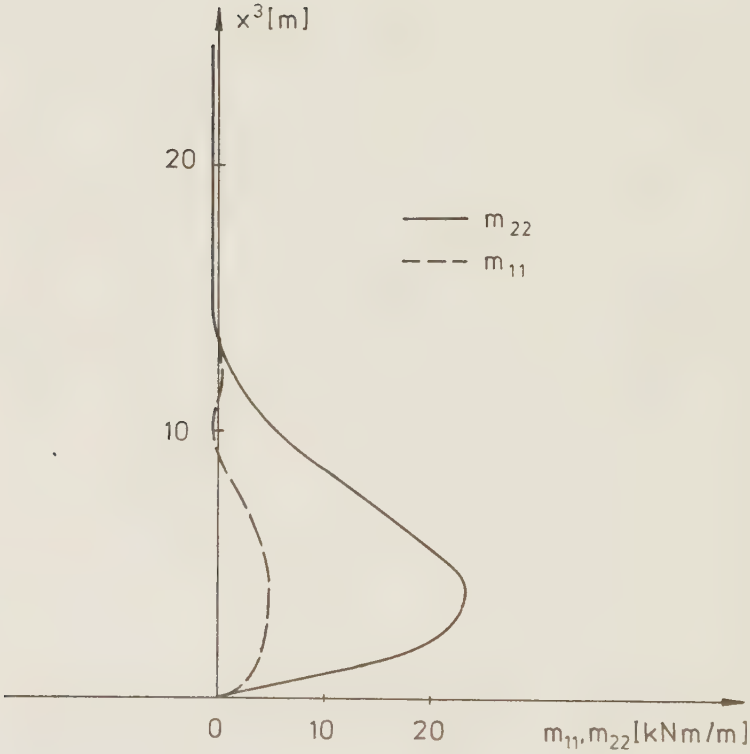


Bild 5.21
Momente in Ringrichtung m_{22} und in Meridianrichtung m_{11} infolge Eigengewicht

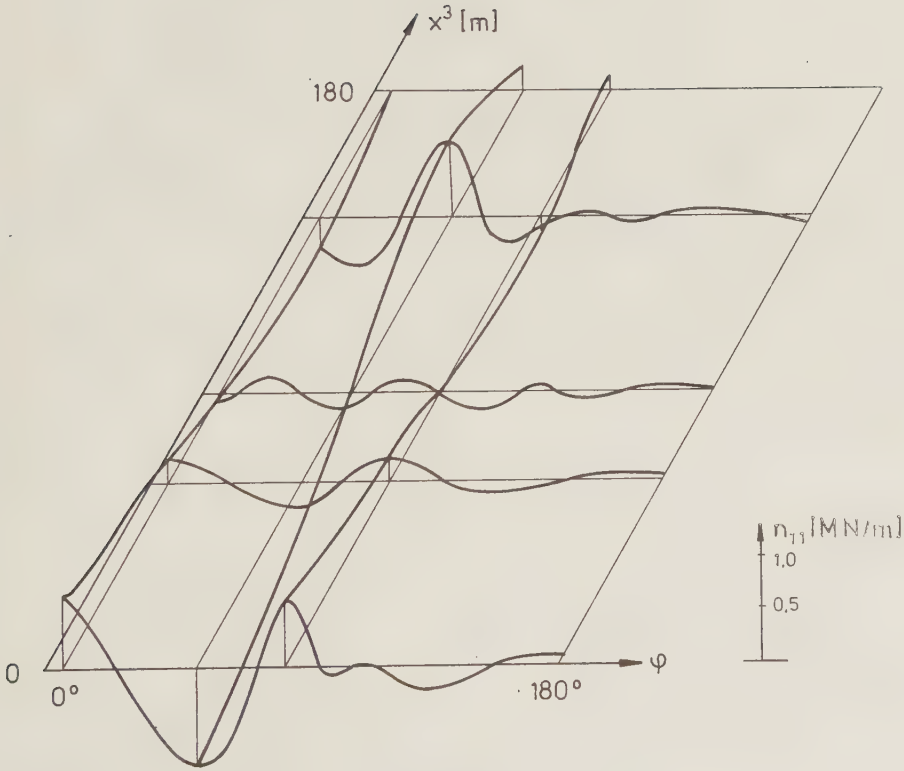


Bild 5.22
Normalkraft in Meridianrichtung n_{11}
infolge Stützensenkung

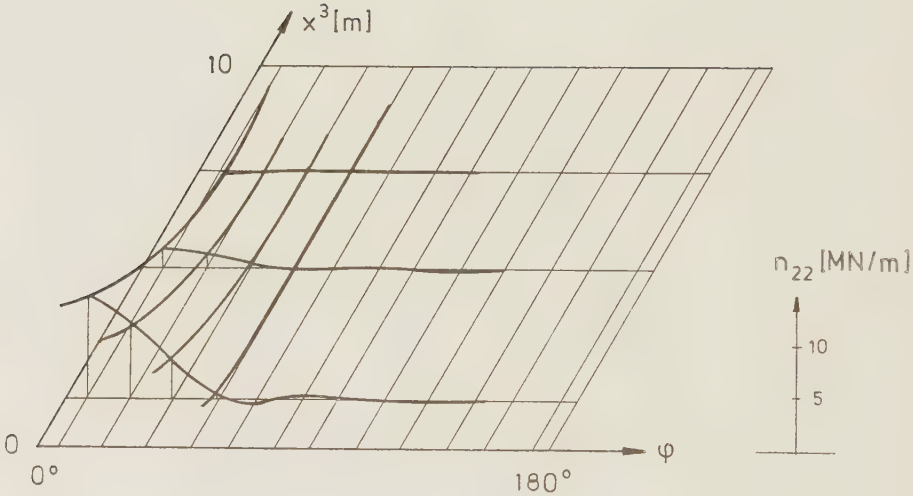


Bild 5.23
Normalkraft in Ringrichtung n_{22}
infolge Stützensenkung

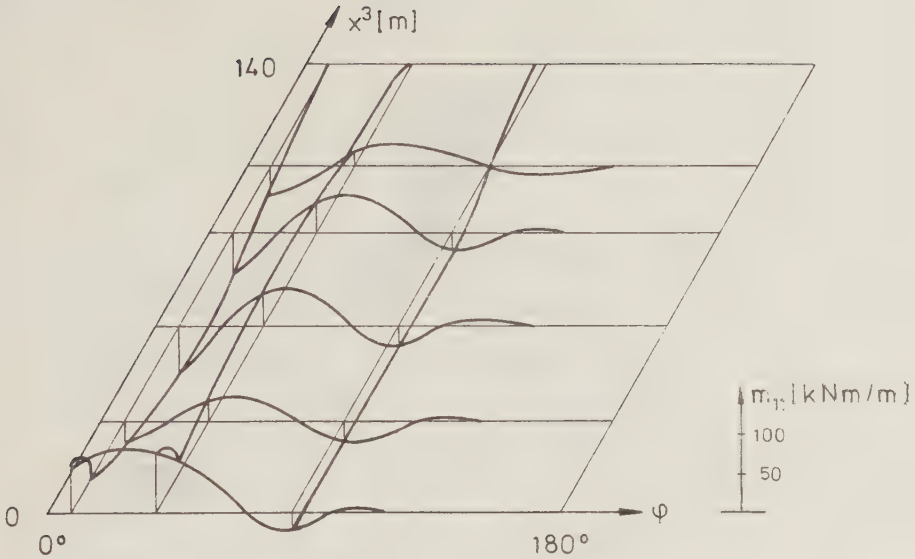


Bild 5.24
Momente in Meridianrichtung m_{11}
infolge Stützensenkung

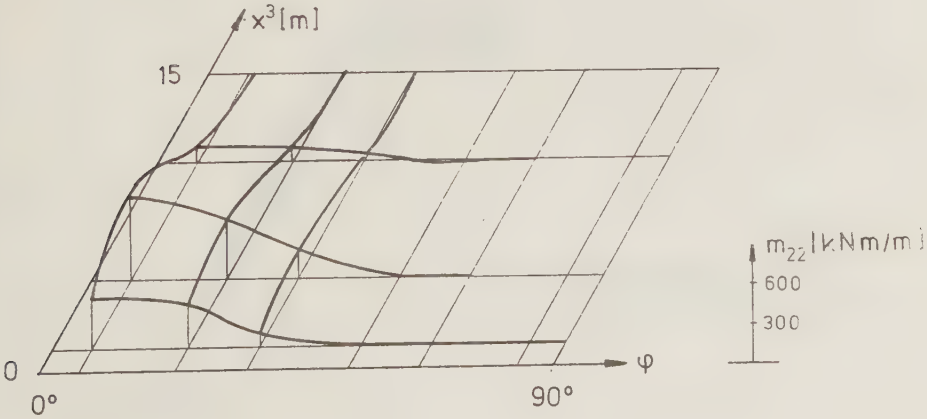


Bild 5.25
Momente in Ringrichtung m_{22}
infolge Stützensenkung

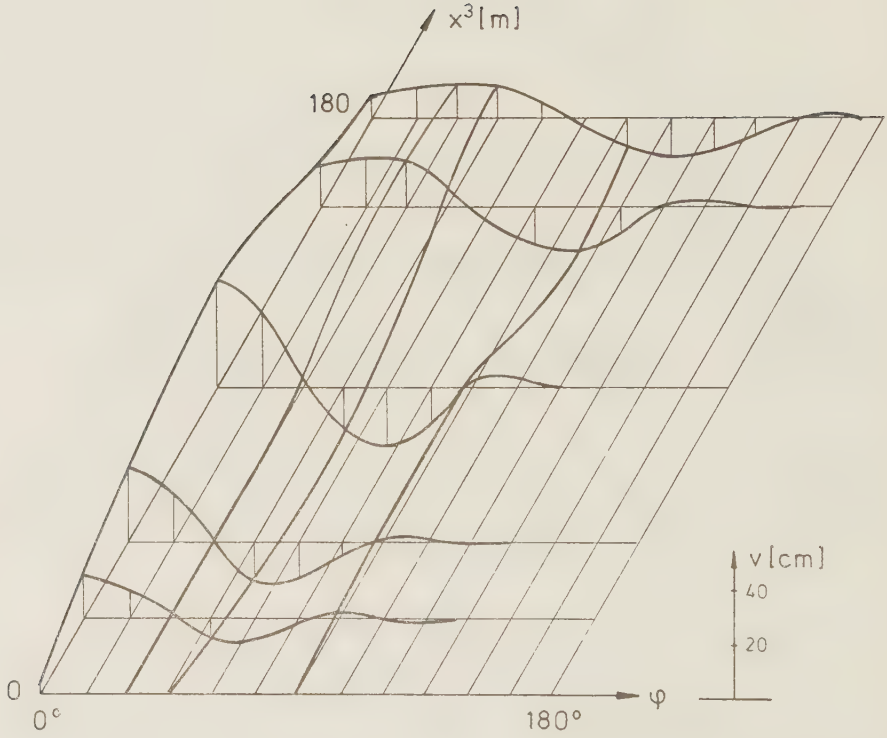


Bild 5.26
Horizontale Verschiebungen v
infolge Stützensenkung

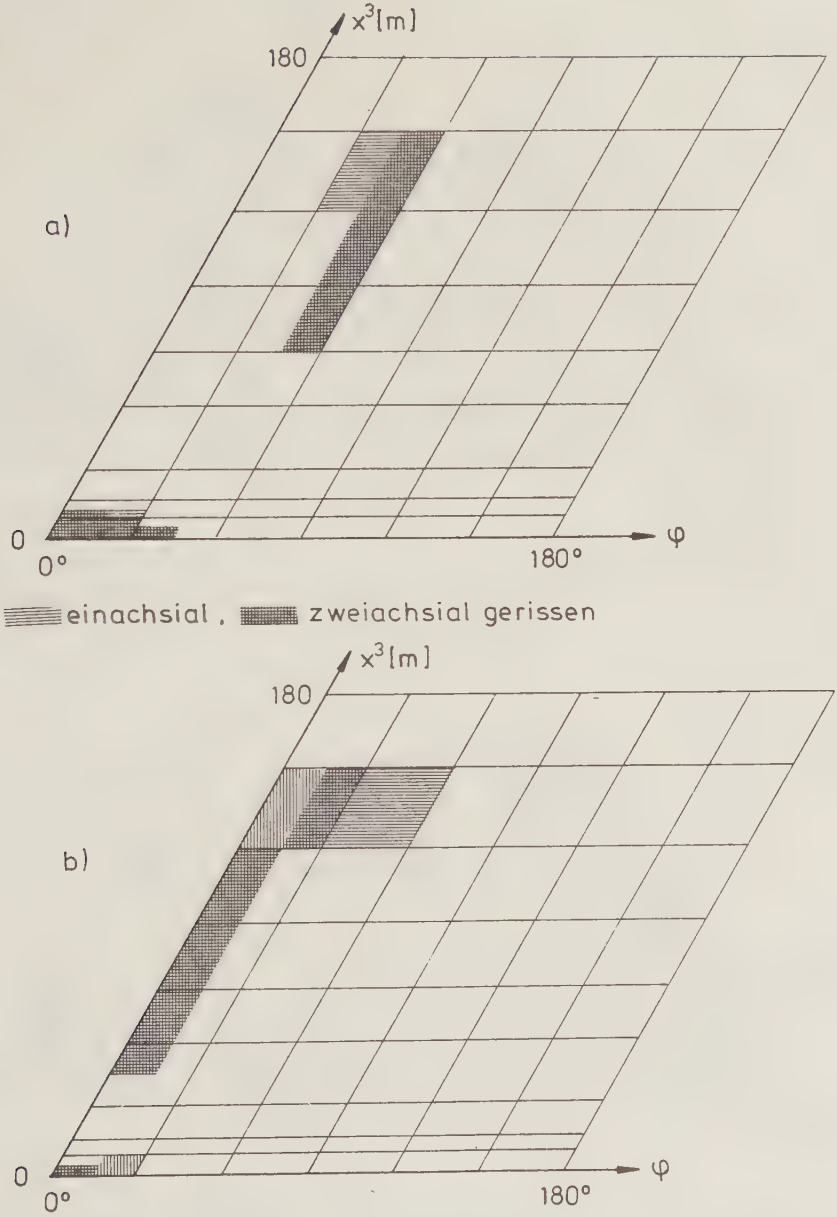


Bild 5.27

Rißbild der Kühlturmschale a) Innenfläche

b) Außenfläche

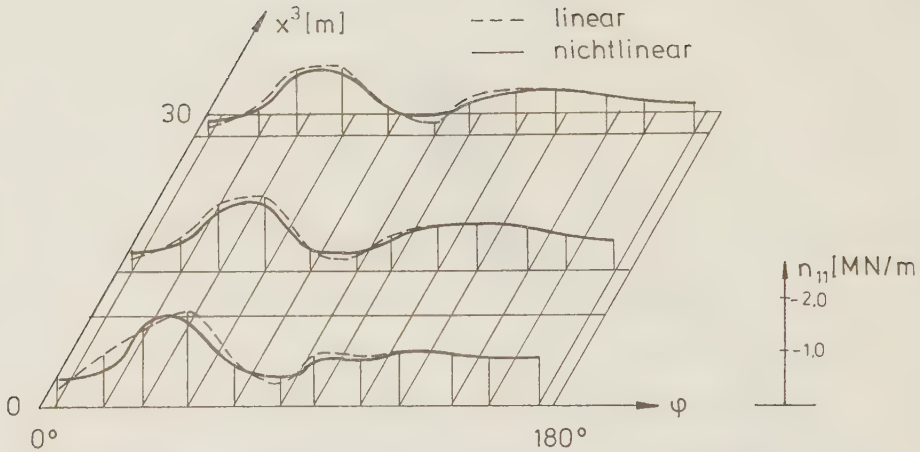


Bild 5.28

Normalkraft in Meridianrichtung n_{11}

Lineare und nichtlineare Ergebnisse

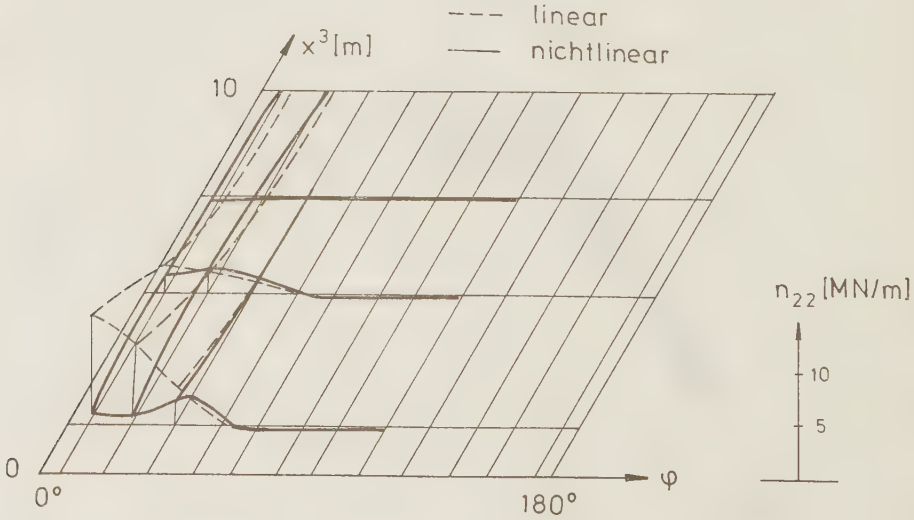


Bild 5.29

Normalkraft in Ringrichtung n_{22}

Lineare und nichtlineare Ergebnisse

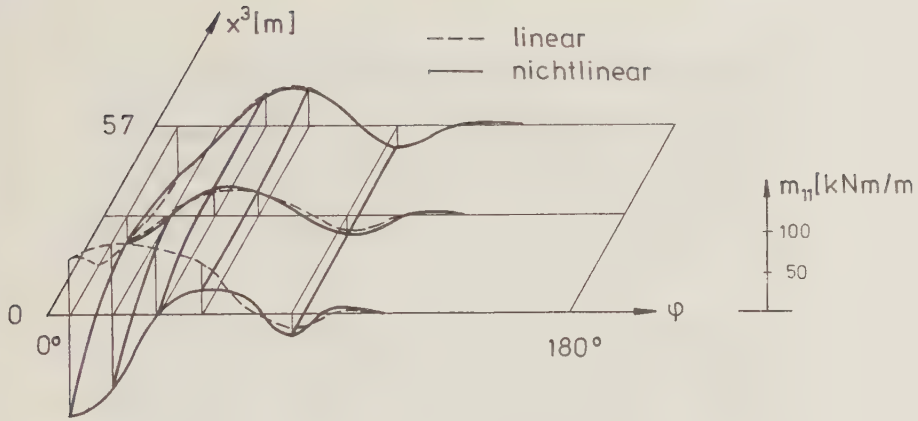


Bild 5.3o
Momente in Meridianrichtung m_{11}
Lineare und nichtlineare Ergebnisse

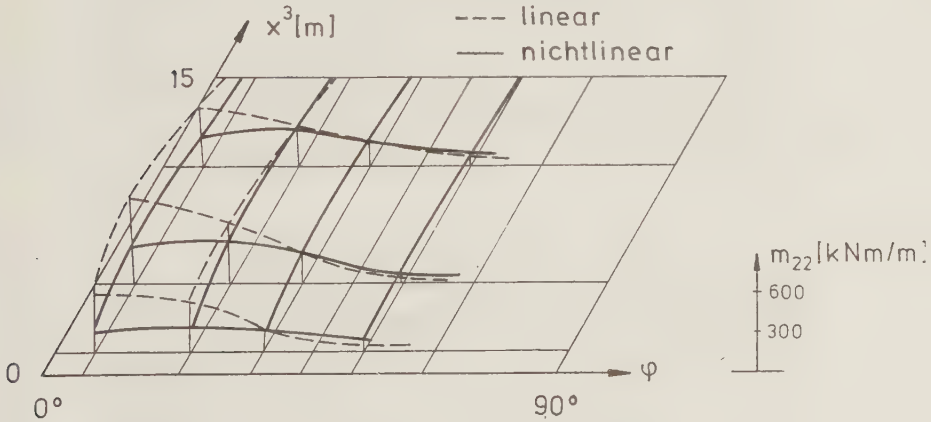


Bild 5.31
Momente in Ringrichtung m_{22}
Lineare und nichtlineare Ergebnisse

6. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente entwickelt, welches innerhalb einer geometrisch nichtlinearen Theorie das Verhalten von Flächentragwerken und Schalen aus Stahlbeton wirklichkeitsnah erfaßt.

Eine Gegenüberstellung von Versuchs- und Rechenergebnissen dient der Überprüfung des entwickelten Verfahrens. Hierbei müssen die grundsätzlichen Probleme sowohl der Versuchsforschung im Stahlbetonbau als auch der numerischen Modelle beachtet werden.
Trotz gleichartiger Versuchsbedingungen innerhalb einer Serie entsteht ein Streubereich der Meßwerte. Auch die Übertragung der Ergebnisse aus zumeist maßstabsgerecht verkleinerten Modellen auf das Original ist nicht ohne die Aussage eines Vertrauensbereiches möglich. Andererseits führen unterschiedlich diskretisierte numerische Modelle zwar zu ähnlichen Aussagen über das Systemtragverhalten, die Differenzen sind lokal jedoch von nicht vernachlässigbarer Größenordnung.

Es ist sicherlich beim jetzigen Stand der Rechentechnik möglich, durch geeignete Eingangsparameter experimentell ermittelte Last-Verformungs-Beziehungen nachzuvollziehen, wobei die Eingangsparameter deterministischer Art sind. Diese im wesentlichen auf eine phänomenologische Beschreibung hinauslaufende Betrachtung wird von den meisten der bisherigen Ansätze verwendet. Eine physikalische Begründung für die Ursache der Übereinstimmung, die für zukünftige Entwicklungen benötigt wird, kann nicht gemacht werden.

Die bisherigen Ansätze betrachten entweder den Zustand der Erstrißbildung oder sie gehen vom abgeschlossenen Rißbild aus. Beide Abschätzungen können zu einer Fehleinschätzung der Steifigkeitsverteilung führen.

Die vorgelegte Arbeit stellt nicht nur das Materialverhalten von Stahl und Beton, sondern auch die Verbundwirkung des einbetonierten Bewehrungsstahles dar, wobei eine unmittelbare Beschreibung des Spannungs- und Verzerrungszustandes innerhalb der Bereiche zwischen einzelnen Rissen erfolgt. Für die Mechanik des Reißens wird ein halbprobabilistischer Ansatz verwendet.

Der Verbundbaustoff Stahlbeton geht als Schichtensystem in die numerische Modellabbildung ein. Der dynamische Charakter des Rißvorganges, der durch Umlagerungen bewirkten Rißausbreitung und die damit verbundene Spannungsumlagerung wird durch ein inkrementelles Tangentensteifigkeitsverfahren brücksichtigt, wobei der Gleichgewichtszustand iterativ bestimmt wird.

Die numerische Erprobung des Rechenprogrammes zeigt, daß das vorgestellte Verfahren in der Lage ist, Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken realistisch abzubilden.

An einigen Beispielen werden die Einflüsse aus den berücksichtigten Nichtlinearitäten auf das Systemtragverhalten rechnerisch untersucht. Es zeigt sich, daß die für homogenen und isotropen Werkstoff

gewonnenen Lösungen nur ein angenähertes Bild des wirklichen Tragverhaltens darstellen. Die anisotropen Materialeigenschaften des Betons in Zusammenhang mit der Rißbildung bewirken Systemsteifigkeitsveränderungen, die nicht in allen Fällen zu Sicherheitsreserven gegenüber den nach einer linearen Theorie ermittelten Werten führen.

Zusammenfassend gilt,daß eine Verformungsberechnung von Stahlbetontragwerken die Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erfordert, da erst auf diese Weise die Steifigkeitsverteilungen wirklichkeitsnah vorhergesagt werden können. Die Eignung der entwickelten Beziehungen wird durch Vergleiche zwischen den Ergebnissen nichtlinearer Tragwerksberechnung und Versuchswerten bestätigt.

Als weitere Entwicklung ist eine Grundlagenstudie auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Basis durchzuführen,welche die Streuung aller relevanter Werkstoffparameter beinhaltet.

7. Bezeichnungen

Geometrische Größen

A	Fläche
R	Radius
U	Umfang
a	Abstand
d,t	Dicke
l	Länge
α, φ	Winkel
μ	Bewehrungsgrad

Physikalische Größen

e	Verzerrungsenergie
π	Arbeit

Tensorielle Größen

C	Konstitutive Komponenten
e, ε	Verzerrungen
S	Spannungen
t	Kräfte
u	Verformungen

Spannungen

σ	Normal-, Schubspannungen
τ_v	Verbundspannungen

Kräfte

P	Einzelkraft
p,q	Flächenkraft

Verzerrungen

ε	Normal-,Schubverzerrungen
$\varkappa$	Krümmung

Verformungen

u, v, w	Verschiebungen
Θ, φ	Rotationen

Materialgrößen

BSt	Betonstahlgüte
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
k_v	Verbundbeiwert
α	Verzahnungsbeiwert
β_{bZ}	Betonbiegezugfestigkeit
β_5, β_{95}	Fraktilenwert der Betonbiegezugfestigkeit
β_d	Betonprismendruckfestigkeit
β_w	Betonwürfeldruckfestigkeit
β_{02}, β_Z	Streckgrenze des Stahles
ν	Querdehnungszahl

Matrizen und Vektoren

$[\ ]$	Matrix
$[\ ]^{-1}$	Inverse Matrix
$[\ ]^T$	Transponierte Matrix
$\{\ \}$	Vektor
$\underline{B}$	Transformationsmatrix
$\underline{C}, \underline{L}$	Elastizitätsmatrix
$\underline{F}$	Knotenkräfte
$\underline{G}$	Operatorenmatrix
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$\underline{J}$	Jakobimatrix
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{R}$	Knotenkräfte
$\underline{S}$	Spannungsmatrix
$\underline{U}$	Verformungsmatrix

$\underline{n}$	Normalkräfte
$\underline{m}$	Momente
$\underline{\Theta}$	Vektor der Knotenvariablen

Indizes, mathematische Symbole

A	Polynomkoeffizient
X	Globale kartesische Koordinaten
f( )	Funktion von ( )
r	Flächenkoordinaten
v	Variationskoeffizient
x,y,z	Lokale kartesische Koordinaten
1,2,3	Ausgezeichnete Koordinaten
Δ ( )	Inkrement von ( )
δ ( )	Variation von ( )
( )'	Bezug auf gedrehtes Koordinatensystem
L	Index unten: Linear
NL	Index unten: Nichtlinear
R	Index unten: Bezug auf Riß
b	Index unten: Beton
e	Index unten: Lokale Größe
m	Index unten: Mittelwert
s	Index unten: Stahl
o,1	Index unten: Anfangswert
s	Index oben : Sekantenwert
t	Index oben : Tangentenwert

Vorzeichenregelung

Spannungen	Zug + , Druck -
Verzerrungen	Längung + ,Stauchung -

Abweichungen und Erweiterungen werden im Text erläutert.

8. Literaturverzeichnis

Abkürzungen

ACI	American Concrete Institut
ASCE	American Society of Civil Engineers
DAfStb	Deutscher Ausschuß für Stahlbeton
IASS	International Association for Shell and Spatial Structures
KIB	Konstruktiver Ingenieurbau Berichte des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum
TWM	Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum
ZAMM	Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

Kapitel 1

/1.1/ Joedicke, J.:
Schalenbau. Karl Krämer Verlag, Stuttgart (1962)

/1.2/ Faber, C.:
Candela und seine Schalen. Verlag Georg D.W. Callwey, München (1965)

/1.3/ Gorny, P./Mahr, D. /Rothert , H.:
Schalenbauten. KIB Heft 6 (1970)

/1.4/ Neuber, H.:
Allgemeine Schalentheorie. ZAMM 29, 97-142 (1949)

/1.5/ Zerna, W.:
Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen. In: Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band 18, 52-71 (1967)

/1.6/ Zerna, W.:
A new formulation of the theory of elastic shells. IASS-Bulletin 36, 61ff (1968)

/1.7/ Green, A.E./ Zerna, W.:
Theoretical elasticity. 2. Ausgabe, Clarendon Press, Oxford (1968)

/1.8/ Zerna, W.:
Über eine nichtlineare allgemeine Theorie der Schalen. In: The theory of thin elastic shells. Symposium Delft, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam (1960)

/1.9/ Krätzig, W.B.:
Thermodynamics of deformations and shell theory. TWM Nr. 71-3 (1971)

/1.10/ Krätzig. W.B.:
Allgemeine Schalentheorie beliebiger Werkstoffe und Verformungen. Ingenieur Archiv 40, 311-326 (1971)

/1.11/ Green, A.E./ Naghdi, P.M.:
Non-isothermal theory of rods, plates and shells. International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, 209ff (1970)

/1.12/ Baçar, Y.:
Eine Schalentheorie endlicher Verformungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Stabilitätstheorie. ZAMM 52, 197ff (1972)

/1.13/ Courant,R.:
Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin American Math. Soc., Vol.49 (1943)

/1.14/ Zienkiewicz, O.C.:
The finite element method in engineering science. McGraw Hill, London (1971)

/1.15/ Oden, J.T.:
Finite elements of nonlinear continua. McGraw Hill, London (1972)

/1.16/ Sanders, J.L.:
Nonlinear theories for thin shells. Quart. Appl. Math. 21, 21-36 (1963)

/1.17/ Koiter, W.T.:
On the nonlinear theory of thin elastic shells. Proc. Koninkl.Ned. Akad. Wetenschappen B. 69, 1-54

/1.18/ Ergaitoudis, J.:
Isoparametric finite elements in two and three dimensional stress analysis. Thesis Ph. D., University of Wales, Swansea (1968)

/1.19/ Ahmad, S./ Irons, B.M./ Zienkiewicz,O.C.:
Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 2, 419-451 (1970)

/1.20/ Gallagher, R.H.:
Finite element representation for thin shell analysis. Buckling of Structures, 40-51 (1976) Budiansky, B. (Hrsg.), Springer Verlag, New York

/1.21/ Bathe, K.J./Bolourchi, S.:
A geometric and material nonlinear plate and shell element. Computers & Structures, Vol. 11, 23-48 (1980)

/1.22/ Kupfer, H.:
Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung. Lehrstuhl für Massivbau der TH München. Bericht Nr. 78 (1969)

/1.23/ Link, J.:
Eine Formulierung des zweiachsigen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten. Dissertation, TH Darmstadt (1975)

/1.24/ Link, J./Mehlhorn, G./ Schäfer, H.:
Berechnung von dünnen Stahlbetonplatten bei Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Forschungsberichte der Arbeitsgruppe Massivbau TH Darmstadt (1972)

/1.25/ Dörr, K./ Mehlhorn, G./ Stauder, W./ Uhlisch, D.:
Berechnung von Stahlbetonscheiben im Zustand II bei Annahme eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Forschungsberichte der Arbeitsgruppe Massivbau der TH Darmstadt (1972)

/1.26/ Eibl, J./ Iványi, G.:
Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton. DAfStb Heft 260 (1976), Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin

/1.27/ Schäfer, H.:
Zur Berechnung von Stahlbetonplatten. Dissertation, TH Darmstadt (1976)

/1.28/ Geistefeldt, H.:
Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand - Berechnung mit Berücksichtigung der rißabhängigen Schubsteifigkeit im Materialgesetz. Institut für Statik der TH Braunschweig, Bericht Nr. 76-19 (1976)

/1.29/ Kristjansson, R.:
Physikalisch und geometrisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten mit Hilfe Finiter Elemente. Dissertation, TH Darmstadt (1977)

/1.30/ Floegl, H.:
Traglastermittlung dünner Stahlbetonschalen mittels der Methode der Finiten Elemente unter Berücksichtigung wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens sowie geometrischer Nichtlinearität. Dissertation, TU Wien (1983)

/1.31/ Rabich, R.:
Beitrag zur Berechung statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahlbeton unter Berücksichtigung der Rißbildung. In: Aus Theorie und Praxis des Stahlbetonbaues. Franz-Festschrift, Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin (1969)

/1.32/ Rao, P.S.:
Die Grundlagen der zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. DAfStb Heft 177 (1966), Verlag Wilh. Ernst & Sohn,Berlin

/1.33/ Koch, R.:
Verformungsverhalten von Stahlbetonstäben unter Biegung und Längszug im Zustand II auch bei Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Dissertation, Universität Stuttgart (1976)

/1.34/ Svensvik, B.:
Zum Verformungsverhalten gerissener Stahlbetonbalken unter Einschluß der Mitwirkung des Betons auf Zug in Abhängigkeit von Last und Zeit. Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der TU Braunschweig, Heft 48 (1981)

/1.35/ Ngo, D./ Scordelis, A.C.:
Finite element analysis of reinforced concrete beams. In: ACI-Journal, Vol. 64-3 (1967)

/1.36/ Hand, F.R./ Pecknold, D.A./ Schnobrich, W.C.: Nonlinear layered analysis of reinforced concrete plates and shells.In: ASCE Journal of the Structural Division, 1491-1505, St7 (1973)

/1.37/ Grünberg, J.: Berechnung von ebenen Stahlbetonflächentragwerken im gerissenen Zustand mit der Methode der finiten Elemente. Werner Verlag, Düsseldorf (1974)

/1.38/ Lin, C.S./ Scordelis, A.C.: Nonlinear analysis of reinforced concrete shells of general form. In: ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 101, No. St.3 (1975)

Kapitel 2

/2.1/ Eibl, J./ Ivanyi, G.: /1.26/

/2.2/ Kupfer, H.: /1.22/

/2.3/ Kupfer, H.: Das nichtlineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung. Beton- und Stahlbetonbau 68 (1973)

/2.4/ Becker, G.: Ein Beitrag zur Festigkeitslehre des Betons. Mehmel-Festschrift, Beton-Verlag, Düsseldorf (1967)

/2.5/ Wittman, F.H.:
Grundlagen eines Modells zur Beschreibung charakteristischer Eigenschaften des Betons. DAfStb Heft 290 (1977), Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin

/2.6/ Link, J.:
/1.23/

/2.7/ Grünberg, J.:
/1.37/

/2.8 Valanis, K.C.:
On the foundations of the endochronic theory of viscoplasticity. Arch. Mech. Stos. 27,857-868 (1975)

/2.9/ Schildberg, K.:
Nichtlineare Ansätze zur Berechnung dynamisch beanspruchter Schalen aus Stahlbeton. TWM Nr. 80-2 (1980)

/2.10/ Ngo, D./ Scordelis, A.C.:
/1.35/

/2.11/ Wegener, R.:
Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit nichtlinearen Materialgesetzen. Institut für Statik der TU Braunschweig, Bericht Nr. 74-11 (1974)

/2.12/ Hansson, V.:
Zur praktischen Berechnung von Scheiben mit beliebiger Geometrie und allgemeinem Materialgesetz. KIB Heft 14 (1973)

/2.13/ Ebbinghaus, P.:
Herleitung eines Verfahrens zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter Berücksichtigung der Rißentwicklung. Dissertation, Technische Hochschule Aachen (1975)

/2.14/ Schmidt, G.:
Temperaturbeanspruchte Stahlbetonschalen im gerissenen Zustand. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1981)

/2.15/ Schäfer, H./ Link, J./ Mehlhorn, G.:
Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetonplatten mit der Finiten-Element-Methode. Beton- und Stahlbetonbau 70, S. 265-273 (1975)

/2.16/ Hand, F.R./ Pecknold, D.A./ Schnobrich W.C.:
A layered finite element nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells. University of Illinois, Urbana, Illinois (1972)

/2.17/ Reimann, H.:
Kritische Spannungszustände des Betons bei mehrachsiger, ruhender Kurzzeitbelastung. DAfStb, Heft 175 (1965), Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin

/2.18/ Kupfer, H.:
Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. DAfStb Heft 229, Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin (1973)

/2.19/ Nomura, T./ Yamazahi, J./ Okomura, H.:
Finite element analysis of beam shear problems. IABSE Colloquium Copenhagen, Plasticity in Reinforced Concrete (1979)

/2.20/ Rüsch, H.:
Der Zusammenhang zwischen Rißbildung und Haftfestigkeit unter besonderer Berücksichtigung der Anwendung hoher Stahlspannungen. 5. Konferenz der Internationalen Vereinigung für Brücken und Hochbau (IVBH), Lissabon (1956)

/2.21/ Rao, P.S.:
/1.32/

/2.22/ Koch, R.:
/1.33/

/2.23/ Martin, H.:
Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit, Verbund und Sprengwirkung von Bewehrungsstählen unter Kurzzeitbelastung. DAfStb Heft 228, Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin (1973)

/2.24/ Griebenow, G.:
Experimentelle Untersuchungen zum Biegetragverhalten gerissener Stahlbetonbalken und -platten im Vergleich mit nichtlinearen FEM-Berechnungen. Universität Braunschweig, Institut für Statik, Bericht Nr. 77-24 (1977)

/2.25/ Rehm, G.:
Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton. DAfStb Heft 138 (1961), Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin

/2.26/ Svensvik, B.:
/1.34/

/2.27/ Rostásy, F.S.:
Zwang und Rissebeschränkung bei Außenwänden aus Stahlleichtbeton. Habilitation, Universität Stuttgart (1975)

/2.28/ Rehm, G./Martin, H.:
Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 8 (1968)

Kapitel 3

/3.1/ Ergaitoudis, J.:
/1.18/

/3.2/ Ahmad, S./ Irons, B.M./Zienkiewicz, O.C.:
/1.19/

/3.3/ Zienkiewicz, O.C./Taylor, R./Too, J.J.M.:
Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 275-290 (1971)

/3.4/ Pawsey,S./ Clough, R.W.:
Improved nummerical integration of thick shell finite elements. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 575-586 (1971)

/3.5/ Razzaque, A.:
Finite element analysis of plates and shells. Thesis Ph. D., University of Wales, Swansea (1972)

/3.6/ Irons, B.M./ Razzaque, A.:
A further modification to Ahmad´s shell element. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol.5, 588-589 (1973)

/3.7/ Love, A.E.H.:
Lehrbuch der Elastizität. Teubner Verlag, Leipzig/Berlin (1907)

/3.8/ Irons, B. M.:
The Semiloof shell element. Kap. XI aus: Gallagher, R.H./Ashwell, D.(Hrsg.) Thin shell structures, John Wiley & Sons, New York (1976)

/3.9/ Loof, H.W.:
The economical computation of stiffnes of large structural elements. Int. Symp. on Use of Comp. in Struct. Eng., University of Newcastle-Upon-Tyne (1966)

/3.10/ Martins, R.A.F./ Owen, D.R.J.:
Structural instability and natural vibration analysis of thin arbitrary shells by use of the semiloof element. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 11, 481-498 (1977)

/3.11/ Martins, R.A.F./Owen, D.R.J.:
Elastoplastic and geometrically nonlinear thin shell analysis by the semiloof element. Computers & Structures, Vol. 13, 505-513 (1980)

/3.12/ Javaherian, H./Dowling, P.J./Lyons, L.P.R.:
Nonlinear finite element analysis of shell structures using the semiloof element. Computers & Structures, Vol. 12, 147-159 (1980)

/3.13/ Green A.E./Zerna, W.:
/1.7/

/3.14/ Kauderer, H.:
Nichtlineare Mechanik. Springer Verlag, Berlin (1958)

/3.15/ Green, A.E./Adkins, J.E.:
Large elastic deformations. Clarendon Press, Oxford (1970)

/3.16/ Krätzig, W.B.:
/1.9/

/3.17/ Nečas, J./Hlaváček, I.:
Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies. Elsevier, Amsterdam/Oxford/New York (1981)

/3.18/ Bathe, K.J./Ozdemir, H.:
Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis.Computers & Structures, Vol., 6, 81-92 (1976)

/3.19/ Bathe, K.J./Ramm,E./Wilson,E.L.:
Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 9, 353-386 (1975)

/3.20/ Bathe, K.J.:
An assessment of current finite element analysis of nonlinear problems in solid mechanics. Numerical solution of partial differential equations III, Academic Press Inc.,New York (1976)

/3.21/ Bathe, K.J./ Bolourchi, S.:
/1.21/

/3.22/ Papenhausen, V.:
Eine engergiegerechte inkrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finiter Elemente. TWM Nr. 75-13 (1975)

/3.23/ Kristjansson, R.:
/1.29/

/3.24/ Zienkiewicz, O.C.:
/1.14/

/3.25/ Oden, J.T.:
/1.15/

/3.26/ Bathe, K.J.:
Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall Inc., New Jersey (1982)

/3.27/ Buck, K.E./ Scharpf, D.W./ Stein, E./ Wunderlich, W.:
Finite Elemente in der Statik. Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin (1973)

/3.28/ Irons B./ Ahmad, S.:
Techniques of finite elements. John Wiley & Sons , New York (1980)

/3.29/ Cervenka, V.:
Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under inplane loads. Thesis Ph. D., University of Colorado (1970)

/3.30/ Franklin, H.A.:
Nonlinear analysis of reinforced concrete frames and panels. Thesis Ph.D., University of California, Berkeley (1970)

/3.31/ Whang, B.:
Elastic-plastic orthotropic plates and shells application of finite element methods in civil engineering. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee (1969)

/3.32/ Hand, F.R./ Pecknold, D.A./ Schnobrich,W.C.:
/2.16/

/3.33/ Link, J./Mehlhorn, G./Schäfer, H. :
/1.24/

/3.34/ Zerna, W./ Mungan, I./ Steffen, W.:
Bestimmung der Beulsicherheit von Schalen aus Stahlbeton unter Berücksichtigung der physikalisch-nichtlinearen Materialeigenschaften. DAfStb Heft 315 (1980) Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin

/3.35/ Schmidt, G.:
/2.14/

/3.36/ Barlow, J.:
Optimal stress locations in finite element models. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 10, 243-251 (1976)

Kapitel 4

/4.1/ Kristjansson, R.:
/1.29/

/4.2/ Zerna, W.:
/1.8/

/4.3/ Krätzig W.B.:
/1.10/

/4.4/ Köpper, H.-D.:
Theorie und numerische Lösung des Stabilitätsproblems allgemeiner Rotationsschalen. TWM Nr. 74-2 (1974)

/4.5/ Fritz, H./ Wittek, U.:
Zur Stabilität der Flächentragwerke. TWM Nr. 74-6 (1974)

/4.6/ Swartz,S.E./ Rosebraugh, V.H./ Berman,M.Y.:
Buckling tests on rectangular concrete panels.
Journal of the American Concrete Institute
(1974)

/4.7/ Zienkiewicz, O.C.:
/1.14/

/4.8/ Oden, J.T.:
/1.15/

/4.9/ Bathe, K.J.:
/3.26/

/4.10/ Bathe, K.J./ Cimento, A.P.:
Some practical procedures for the solution
of nonlinear finite element equations.
Computer methods in applied mechanics and
engineering, Vol. 22, 59-85, (1980)

/4.11/ Anderheggen, E.:
Geometrisch und phsikalisch nichtlineare
Probleme. Aufsatz in: Finite Berechnungs-
methoden im Konstruktiven Ingenieurbau.
TWM Nr. 76-8 (1976)

/4.12/ Eibl, J./ Jványi, G.:
/1.26/

/4.13/ Irons, B.M.:
A frontal solution program for finite ele-
ment analysis.Int. Journ. Num. Meth. Eng.,
Vol. 2, 5-32 (1970)

/4.14/ Yeo, M.F.:
A more efficient front solution: Allocating assembly locations by longevity considerations. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 7, 570-573 (1973)

/4.15/ Light, M.F./ Luxmoore, A.R.:
Application of the front solution to two and three-dimensional elastoplastic crack problems. Int. Journ. Num. Meth. Eng. 393-395 (1977)

/4.16/ Hood, P.:
Frontal solution program for unsymmetric matrices. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 10, 379-399 (1976)

/4.17/ Alizadeh, A./ Will, G.T.:
A substructured frontal solver and its application to localized material nonlinearity. Computers & Structures, Vol. 10, 225-231 (1979)

/4.18/ Agrawal, A.B./Mufti, A.A./Jaeger, L.G.:
Band-schemes vs. frontal-routines in nonlinear structural analysis. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 15, 753-766 (1980)

/4.19/ Thompson, E./ Shimazahi, Y.:
A frontal procedure using skyline storage. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 15, 889-910 (1980)

/4.20/ Razzaque, A.:
Automatic reduction of frontwidth for finite element analysis. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 15, 1315-1324 (1980)

/4.21/ Taylor, R.L./Wilson, E.L./ Sachett, S.J.:
Direct solution of equations by frontal and variable band, active columm methods. Auszug aus: Non-linear finite element analysis in structural mechanics. Papers presented at the Europe-US workshop, Ruhr-Universität Bochum (1980)

/4.22/ Pina, H.L.G.:
An algorithm for frontwidth reduction. Int. Journ. Num. Meth. Eng., Vol. 17, 1539-1546 (1981)

Kapitel 5

/5.1/ Ahmad, S./Irons, B.M./Zienkiewicz, O.C.:
/1.19/

/5.2/ Irons, B.M.:
/3.8/

/5.3/ Vißmann, W.:
Stahlfaserverstärkte Stahlbetonplatten. Dissertation, Universität Bochum (1983)

/5.4/ Zell, W.:
Einfluß der Temperatur auf das Tragverhalten der Flächentragwerke aus Stahlbeton und Stahlfaserbeton. Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben des Landes NRW, Ruhr-Universität Bochum (1983)

/5.5/ Zell, W.:
Das Tragverhalten belasteter Kugelschalen aus Stahlbeton und Stahlfaserbeton unter gleichzeitiger Wirkung allgemeiner Temperaturzustände. TWM Nr. 84-1 (1984)

/5.6/ Wunderlich, W.:
Der Kühlturm als biegesteife Schale.
KIB Heft 1 (1968)

/5.7/ Wunderlich, W.:
Zur Biegebeanspruchung von Kühlturmschalen bei Fundamentsetzungen. KIB Heft 7 (197o)

/5.8/ Flessner, H.:
Bergsenkungseinflüsse und seismische Belastungen. KIB Heft 1 (1968)

/5.9/ Peters, H.L.:
Konstruktive Möglichkeiten für die Bergschadenssicherung von Naturzugkühlern.
KIB Heft 29/3o (1977)

L E B E N S L A U F

Geburtsdatum und -ort	6. Januar 1950 in Bochum

Schulbildung

April 1956 - März 1960	Volksschule
April 1960 - Mai 1969	Gymnasium mit Abschluß Abitur

Studium

Oktober 1969 - Februar 1974	Studium des Bauingenieurwesens an der Ruhr-Universität Bochum mit Abschluß Diplom

Wehrdienst

April 1975 - Juni 1976

Berufliche Tätigkeit

Februar 1974 - Juni 1977	Angestellter bei Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. W. Zerna Büro für konstruktiven Ingenieurbau
Juli 1977 - März 1979	Wissenschaftlicher Angestellter und
seit April 1979	Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Massivbau Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. W. Zerna Institut für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum